GENERAL LIBRARY
JAN 20 1920
UNIV. OF MICH.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 147.

Heft 1.

Ausgegeben den 21. Juli

Berlin W. 10
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1916.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Jeder Band 16 Mark.

Band 147. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

Hensel, K., Allgemeine Theorie der Kongruenzklassengruppen und ihrer Invarianten in algebraischen Körpern . . . . . Seite 1

Gronwall, T. H., Über einige Summationsmethoden und ihre Anwendung auf die *Fourier*sche Reihe. . . . . — 16

Perron, Oskar, Über Systeme von linearen Differenzengleichungen erster Ordnung. . . . . — 36

Preisausschreiben S. M. des Königs von Schweden . . . . . — 53

Kneser, Adolf, Transformationsgruppen und Variationsrechnung. . . . — 54

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 147.

In vier Heften.

Berlin,
W. 10, Genthinerstraße 38.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1917.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 147.

Seite

Fueter, Rudolf, Die Klassenzahl zyklischer Körper vom Primzahlgrad, deren Diskriminante nur eine Primzahl enthält . . . . . 174—183

Gronwall, T. H., Über einige Summationsmethoden und ihre Anwendung auf die *Fourier*sche Reihe . . . . . 16— 35

Hensel, K., Allgemeine Theorie der Kongruenzklassengruppen und ihrer Invarianten in algebraischen Körpern . . . . . 1— 15

— — Die Verallgemeinerung des *Legendre*schen Symboles für allgemeine algebraische Körper . . . . . 233—248

Kneser, Adolf, Transformationsgruppen und Variationsrechnung. . . . 54— 66

Koebe, Paul, Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. III. Der allgemeine Fundamentalsatz der konformen Abbildung nebst einer Anwendung auf die konforme Abbildung der Oberfläche einer körperlichen Ecke . . . . . 67—104

Koschmieder, Lothar, Konjugierte Punkte und Enveloppen bei speziellen Variationsproblemen . . . . . 105—131

Ostrowski, Alexander, Über sogenannte perfekte Körper . . . . . 191—204

Pasch, M., Grundfragen der Geometrie . . . . . 184—190

— — Sechs Punkte einer Ebene . . . . . 249—250

Perron, Oskar, Über Systeme von linearen Differenzengleichungen erster Ordnung . . . . . 36— 52

Schottky, F., Problematische Punkte und die elementaren Sätze, die zum Beweise des *Picard*schen Theorems dienen . . . . . 161—172

Schur, J., Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind . . . . . 205—232

Szász, Otto, Über die Erhaltung der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche bei independenter Veränderlichkeit aller ihrer Elemente . . . 132—160

Notiz betreffend Dr. Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis 173

Preisausschreiben S. M. des Königs von Schweden 53

Ausgabedaten der Hefte von Band 147.

Heft 1 ausgegeben am 21. Juli 1916.
Heft 2/3 ausgegeben am 2. März 1917.
Heft 4 ausgegeben am 31. Juli 1917.

Allgemeine Theorie der Kongruenzklassengruppen und ihrer Invarianten in algebraischen Körpern.

Von Herrn *K. Hensel* in Marburg a. d. L.

§ 1.

Einleitung. — Die irregulären Einseinheiten des Körpers $K(\mathfrak{p})$.

Die vorliegende Untersuchung schließt sich eng an die beiden im vorigen Bande dieses Journals veröffentlichten Abhandlungen an*). In ihnen wurde die Aufgabe behandelt, die Einheiten eines beliebigen Zahlkörpers für den Bereich eines Primteilers $\mathfrak{p}$ und speziell die Kongruenzklassengruppen für eine beliebige Potenz $\mathfrak{p}^{s+1}$ desselben als Modul vollständig zu untersuchen, d. h. ihre Basis und ihre Invarianten aufzustellen. Die letzte dieser beiden Aufgaben wurde in der zweiten Abhandlung vollständig in dem Falle gelöst, daß jener Körper $K(\mathfrak{p})$ keine p-ten Einheitswurzeln enthält. In dieser dritten Arbeit soll nun auch jener Ausnahmefall vollständig erledigt und damit das ganze Problem zum Abschluß gebracht werden.

Dieser Ausnahmefall tritt nun, wie H^{II} S. 217 (2.) gezeigt wurde, stets und nur dann ein, wenn der Grad e und der Index g von $-p$ im Körper $K(\mathfrak{p})$ beide durch $p-1$ teilbar sind. Ist dann p^{r_0-1} die höchste in e enthaltene Potenz von p, so daß also wie a. a. O.

$$(1.)\quad e = e_0 \cdot p^{r_0-1}(p-1), \qquad g \equiv g_0 p^{r_0-1}(p-1) \pmod{p^f-1}$$

*) 1) *K. Hensel.* Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers. Dieses Journal Bd. 146 S. 189—215.

2) *K. Hensel.* Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für eine beliebige Primteilerpotenz als Modul. Ebenda S. 216—228.

Ich werde diese beiden Abhandlungen mit H^{I} und H^{II} zitieren.

gesetzt werden kann, wo e_0 eine Einheit modulo p bedeutet, so hatten die a. a. O. durchgeführten Untersuchungen ergeben, daß in diesem Falle jede Einheit η von $K(\mathfrak{p})$ eindeutig in der Form darstellbar ist

$$(2.) \qquad \eta = w^b \eta_0^{e_0} \eta_1^{e_1} \dots \eta_\lambda^{e_\lambda} \quad (\mathfrak{p}), \qquad \begin{pmatrix} b = 0, 1, \dots p^f - 2 \\ e_0 = 0, 1, \dots p^{\nu_0} - 1 \\ e_i = e_i^{(0)} + e_i^{(1)} p + \dots \end{pmatrix}$$

wo w eine primitive $(p^f - 1)$-te Einheitswurzel ist und die Einseinheiten $\eta_0, \eta_1, \dots \eta_\lambda$ die a. a. O. (4.) und (6.) angegebenen Werte besitzen. Zwischen ihnen besteht nun in diesem Ausnahmefalle eine Gleichung (H^{I} S. 207) (14^{a}.)

$$(3.) \qquad \overline{\eta} = \eta_0^{d_0} \eta_1^{d_1} \dots \eta_\lambda^{d_\lambda} = 1 \quad (\mathfrak{p}),$$

deren Exponenten d_i bestimmte ganze p-adische Zahlen sind; der Gleichmäßigkeit wegen wurde der erste, welcher p^{ν_0} ist, gleich d_0 gesetzt. Endlich wurde H^{I} S. 209 (4.) nachgewiesen, daß eine in der Form

$$\eta = \eta_0^{e_0} \eta_1^{e_1} \dots \eta_\lambda^{e_\lambda} \qquad (e_i = e_0^{(i)} + e_1^{(i)} p + \cdots)$$

dargestellte Einseinheit, deren Exponenten e_i alle (also mit Einschluß von e_0) ganze p-adische Zahlen sind, stets und nur dann gleich Eins ist, wenn sie eine Potenz $\overline{\eta}^t$ von $\overline{\eta}$ mit ganzzahligem Exponenten t, wenn also allgemein

$$e_i = t d_i$$

ist.

Eine zweite allein in dem hier behandelten Ausnahmefalle vorhandene Besonderheit ist das Auftreten derjenigen Einseinheiten, welche ich als „*irregulär*“ bezeichnen möchte; ich werde zeigen, daß unter ihnen die in $K(\mathfrak{p})$ vorhandenen p-ten Einheitswurzeln mit enthalten sind.

Ist $\eta = 1 + w\pi^k + \cdots$ eine Einseinheit von einem beliebigen Grade k, und ist $p^\varkappa$ die niedrigste Potenz von p, für welche $kp^\varkappa > r = \left[\frac{e}{p-1}\right]$ ist, so sind, wie H^{I} a. S. 202 in (3.) und (3^{a}.) bewiesen wurde, die Grade der Potenzen:

$$(4.) \qquad \eta,\ \eta^p,\ \eta^{p^2}, \dots\ \eta^{p^\varkappa},\quad \eta^{p^{\varkappa+1}}, \dots \qquad \eta^{p^{\varkappa+\nu}}, \dots$$

im allgemeinen stets gleich:

$$(4^{\mathrm{a}}.) \qquad k, kp, kp^2, \dots kp^\varkappa, kp^\varkappa + e, \dots kp^\varkappa + \nu e, \dots .$$

Eine Ausnahme tritt allein in dem hier behandelten Falle und zwar stets und nur dann ein (vgl. H^{II} S. 217 unten), wenn $\eta \backsim \eta_0^c$ ist, wo $c = p^{\varrho_0} c_0$ eine ganze Zahl bedeutet, deren Ordnungszahl ϱ_0 kleiner als ν_0 ist. Haben nämlich η und η_0^c dasselbe Hauptglied, so sind die Grade der Potenzen:

$$(4^{\mathrm{b}}.) \qquad \eta,\ \eta^p, \dots\ \eta^{p^{\varkappa-1}},\ \eta^{p^\varkappa}, \eta^{p^{\varkappa+1}}, \dots\ \eta^{p^{\varkappa+\nu}}, \dots$$

beziehlich gleich:

$$(4^{\mathrm{c}}.) \qquad k, kp, \dots kp^{\varkappa-1},\ s,\ s+e, \dots s+\nu e, \dots,$$

wo s eine von η abhängige Zahl ist, welche größer als der im normalen Falle auftretende Grad kp^x ist.

Im ersten Falle soll η eine *reguläre*, im zweiten eine *irreguläre Einseinheit* genannt werden; im letzten Falle soll p^x ihr *Irregularitätsexponent* heißen. Endlich möge der Grad s von η^{p^x} der *Irregularitätsgrad von* η genannt werden.

Der Irregularitätsexponent einer Einheit η vom Grade k ist also die kleinste Potenz von p, für welche $kp^x > r$ ist.

Im Körper $K(p)$ der rationalen Zahlen für den Bereich einer *ungeraden* reellen Primzahl p sind, wie H^1 S. 191 (4.) bewiesen wurde, alle Einseinheiten regulär; ist dagegen $p = 2$, so sind allein die dyadischen Einheiten ersten Grades $\eta = 1 + 2 + \cdots$ irregulär, da für sie die Potenzen

$$\eta, \eta^2, \eta^{2^2}, \eta^{2^3}, \ldots \text{ die Grade } 1, s, s+1, s+2, \ldots$$

besitzen, wo $s > 2$ ist. (Vgl. $H.^1$ S. 192 (6).) Man erkennt leicht, daß für eine solche Einheit ersten Grades:

$$\eta = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{\nu-1} = -1 + 2^\nu$$

der Irregularitätsgrad $s = \nu + 1$ ist, da $(-1 + 2^\nu)^2 = 1 - 2^{\nu+1} + 2^{2\nu}$ ist; so besitzen z. B. die Einheiten $\eta = 3, 7, 15, \ldots$ die Irregularitätsgrade $3, 4, 5, \ldots$ für den Bereich von 2. In dem hier betrachteten Beispiele erkennt man endlich, daß für $\nu = \infty$ $\eta = 1 + 2^1 + 2^2 + \cdots$ den Irregularitätsgrad $s = \infty$ besitzt, also eine primitive zweite Einheitswurzel ist, und in der Tat ist ja dann $\eta = \lim_{\nu=\infty} (-1 + 2^\nu) = -1$.

Im allgemeinen Falle bietet sich die Aufgabe, unter den äquivalenten irregulären Einheiten eine solche von möglichst hohem Irregularitätsgrade auszuwählen. Diese Aufgabe wird im folgenden vollständig gelöst, und es wird sich zeigen, daß dieser größte Irregularitätsgrad keineswegs für jeden der möglichen Grade von η unendlich groß ist, so daß die entsprechenden Einheiten Einheitswurzeln werden. Mit Hülfe dieser Einheiten kann aber die Hauptaufgabe dieser Arbeit, die Untersuchung der Kongruenzklassengruppen für eine beliebige Primteilerpotenz, ohne große Schwierigkeit vollständig gelöst werden.

§ 2.

Die Zurückführung der Fundamentalrelation auf die reduzierte Form.

Für das Folgende ist es wichtig, das zugrunde gelegte Fundamentalsystem $(\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_\lambda)$ durch ein äquivalentes zu ersetzen, durch das

die zwischen den $(\lambda+1)$ Elementen bestehende, auf S. 2 angegebene Fundamentalrelation:

$$(1.) \qquad \eta_0^{d_0}\eta_1^{d_1}\cdots\eta_\lambda^{d_\lambda}=1$$

in eine möglichst einfache Form übergeht.

Zu diesem Zwecke zerlege ich $\eta_0^{p^{\nu_0}}$ nach der in H^{I} S. 196 angegebenen Methode in das Produkt:

$$\eta_0^{p^{\nu_0}}=\overline{\eta}^{(\sigma)}\overline{\eta}^{(\sigma+1)}\cdots \qquad (\mathfrak{p}),$$

wo allgemein jedes $\overline{\eta}^{(i)}$ eine eindeutig bestimmte Einheit des Systems $(\overset{(i)}{\eta})$ für den i-ten Grad bedeutet; da $\eta_0^{p^{\nu_0}}$ von höherem als dem $(r+e)$-ten Grade ist, so gilt das Gleiche von allen rechts stehenden Einheiten. Bringt man das rechts stehende Produkt durch Division auf die linke Seite, so erhält man eine Gleichung:

$$(2.) \qquad \eta_0^{p^{\nu_0}}\eta^{(\sigma)}\eta^{(\sigma+1)}\cdots=1 \qquad (\mathfrak{p}),$$

in welcher die Einseinheiten $\eta^{(i)}$ ebenfalls den Systemen $(\overset{(i)}{\eta})$ angehören.

Jede von diesen Einseinheiten $\eta^{(i)}$ kann nun als Potenz eines Produktes von den f Basiselementen $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_f)$ für einen bestimmten Grad k, nämlich in der Form:

$$(3.) \qquad \eta^{(i)}=(\eta_1^{c_1}\eta_2^{c_2}\cdots\eta_f^{c_f})^{p^{n_i}}=\xi_i^{p^{n_i}}$$

dargestellt werden; hier sind die Exponenten $c_1, \ldots c_f$ im allgemeinen Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots p-1$, weil nach H^{I} S. 202 (5.) die Potenzen $(\eta_1^{p^{n_i}}, \ldots \eta_f^{p^{n_i}})$ im allgemeinen eine Basis für den Grad i der Einheit $\eta^{(i)}$ sind. Nur in dem einen Falle, wo $k=e_0$ ist, wo also das irreguläre Element η_0 der Basis $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_f)$ angehört, kann und soll statt desselben das reguläre Element $\eta_f=\eta_\lambda=1+\xi\pi^{e_0p^{\nu_0}}$ vom Grade $e_0p^{\nu_0}$ gewählt werden, während die $f-1$ übrigen Elemente $\eta_1, \ldots \eta_{f-1}$ den Grad e_0 selbst besitzen. Da hier die Potenzen $(\eta_1^{p^{\nu_0+n_i}}, \ldots \eta_{f-1}^{p^{\nu_0+n_i}}, \eta_f^{p^{n_i}})$ für den Grad $i>r+e$ eine Basis bilden, so ist allein in diesem Falle:

$$(3^{\mathrm{a}}.) \qquad \eta^{(i)}=(\eta_1^{c_1p^{\nu_0}}\cdots\eta_{f-1}^{c_{f-1}p^{\nu_0}}\eta_f^{c_f})^{p^{n_i}} \text{ oder } =(\eta_1^{c_1}\cdots\eta_{f-1}^{c_{f-1}})^{p^{n_i+\nu_0}},$$

(wo alle $c_k=0, 1, \ldots p-1$ sind), je nachdem $c_f>0$ oder $c_f=0$ ist.

In der so sich ergebenden Gleichung

$$(4.) \qquad \eta_0^{p^{\nu_0}}\xi^{(\sigma)p^{n_\sigma}}\xi^{(\sigma+1)p^{n_\sigma+1}}\cdots=1$$

wachsen die Exponenten n_i mit zunehmendem i über jede Grenze, so daß nur eine endliche Anzahl von ihnen unterhalb ν_0 liegen. In der Tat folgt unmittelbar aus dem in H^{I} S. 211 oben bewiesenen Satze, daß in einer Einheit $\eta^{(i)}=(\xi^{(i)})^{p^{n_i}}$, deren Grad $i>r+se$ ist, der Exponent n_i größer als

s sein muß. Also können nur die Einheiten $\eta^{(i)}$ einen unterhalb ν_0 liegenden Exponenten n_i haben, deren Grad $i \leqq r + \nu_0 e$ ist. Da ferner für alle diese Einheiten $\eta^{(i)}$ der Grad $i > r + 1 \cdot e$ ist, so folgt aus demselben Satze, daß alle diese Exponenten n_i mindestens gleich Eins sind.

Ich betrachte nun in (2.) die Einseinheiten $\eta^{(\sigma)}, \eta^{(\sigma+1)}, \ldots$ der Reihe nach und fasse zunächst diejenigen Faktoren in ein Produkt zusammen, deren Exponenten $p^{n_\sigma}, p^{n_{\sigma+1}}, \ldots$ gleich oder größer als p^{ν_0}, also durch p^{ν_0} teilbar sind. Dieses kann also in der Form $(\eta_1^{(0)})^{p^{\nu_0}}$ geschrieben werden, wo $\eta_1^{(0)}$ eine reguläre Einheit bedeutet. Enthält $(\eta_1^{(0)})^{p^{\nu_0}}$ alle Faktoren von (2.), so ist unsere Reduktion mit diesem ersten Schritte bereits abgeschlossen. Im entgegengesetzten Falle besteht $\eta_1^{(0)}$ nur aus einer endlichen Anzahl von Faktoren; dann besitzt der nächstfolgende Faktor unseres Produktes die Form $\eta^{(1)p^{\nu_1}}$, deren Exponent $p^{\nu_1} < p^{\nu_0}$ sein wird, und es mögen wieder alle auf ihn folgenden Faktoren, deren Exponenten sämtlich durch p^{ν_1} teilbar sind, durch $\eta_1^{(1)^{p^{\nu_1}}}$ bezeichnet werden. So kann man fortfahren und gelangt nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu einer Einheit $(\eta^{(\varepsilon)})^{p^{\nu_\varepsilon}}$, für welche alle in unendlicher Anzahl folgenden Einheiten $\xi_\tau^{p^{n_\tau}}$ Exponenten p^{n_τ} besitzen, welche Multipla von p^{ν_ε} sind. Faßt man diese endlich in ein Glied $(\eta^{(\varepsilon)})^{p^{\nu_\varepsilon}}$ zusammen, so erhält man für (2.) die einfachere Relation:

$$(5.) \qquad (\eta_0 \eta_1^{(0)})^{p^{\nu_0}} (\eta^{(1)} \eta_1^{(1)})^{p^{\nu_1}} \ldots (\eta^{(\varepsilon)} \eta_1^{(\varepsilon)})^{p^{\nu_\varepsilon}} = 1,$$

in welcher alle Einseinheiten bis auf die letzte $\eta_1^{(\varepsilon)}$ aus einer endlichen Anzahl von Faktoren bestehen und alle außer der ersten reguläre Einheiten sind.

Diese Gleichung kann nun nach zwei Richtungen wesentlich vereinfacht werden: Erstens zeige ich nämlich, daß in jedem der $(\varepsilon + 1)$ Produkte $\eta^{(i)} \cdot \eta_1^{(i)}$ der zweite Faktor von höherem Grade als der erste, daß also stets

$$\eta^{(i)} \eta_1^{(i)} \backsim \eta^{(i)} \qquad (i = 0, 1, \ldots \varepsilon)$$

ist. Dies ergibt sich zunächst für die ε letzten regulären Produkte aus dem Satze:

> Ist von zwei regulären Einseinheiten η und η_1 die zweite von höherem Grade als die erste, so ist für jeden Exponenten p^ν auch $\eta_1^{p^\nu}$ von höherem Grade als η^{p^ν}.

In der Tat, haben η und η_1 die Grade δ und δ_1, und ist $\delta < \delta_1$, so ist für jedes $\varkappa$ auch $\delta p^\varkappa < \delta_1 p^\varkappa$; sind also $p^\varkappa$ und $p^{\varkappa_1}$ die kleinsten Potenzen von p, für welche $\delta p^\varkappa$ und $\delta_1 p^{\varkappa_1}$ größer als r sind, so folgt aus der Ungleichung $r < \delta p^\varkappa < \delta_1 p^\varkappa$, daß $\varkappa \geqq \varkappa_1$ sein muß. Ferner besitzen die Potenzen η^{p^ν}

und $\eta_1^{p^\nu}$ die Grade $\delta p^\varkappa + (\nu - \varkappa)e$ und $\delta_1 p^{\varkappa_1} + (\nu - \varkappa_1)e$, und man erkennt leicht, daß ihre Differenz

$$(6.) \qquad (\delta_1 p^{\varkappa_1} - \delta p^\varkappa) + (\varkappa - \varkappa_1)e$$

in der Tat stets positiv wird, wenn $\delta_1 > \delta$ ist. Die erste Differenz ist nämlich absolut kleiner als e, die zweite ein nicht negatives Vielfaches von e. Ist also $\varkappa = \varkappa_1$, so wird (6.) gleich $(\delta_1 - \delta)p^\varkappa > 0$, ist dagegen $\varkappa > \varkappa_1$, so gilt dasselbe, da dann der zweite Teil jenes Ausdruckes positiv und größer als der erste ist. Aus dem so bewiesenen Satze folgt sofort, daß auch umgekehrt η_1 von höherem Grade als η sein muß, wenn $\eta_1^{p^\nu}$ von höherem Grade als η^{p^ν} ist. Hieraus folgt endlich, daß wirklich für jedes der ε regulären Produkte $\eta^{(i)}\eta_1^{(i)}$ der zweite Faktor von höherem Grade als der erste ist, w. z. b. w

Aus demselben Satze kann auch gefolgert werden, daß für das erste Produkt $\eta_0\eta_1^{(0)}$ der Grad δ_1 des zweiten Faktors größer ist als der Grad δ des ersten. Hier ist nämlich die vorher mit $p^\varkappa$ bezeichnete Potenz von p gleich p^{ν_0}, da aber η_0 irregulär ist, so hat $\eta_0^{p^{\nu_0}}$ einen Grad $\delta p^{\nu_0} + t$, wo t eine positive Zahl ist. Hat für die reguläre Einheit $\eta_1^{(0)}$ $\varkappa_1$ die frühere Bedeutung, so besitzt $(\eta_1^{(0)})^{p^{\nu_0}}$ wieder den Grad $\delta_1 p^{\varkappa_1} + (\nu_0 - \varkappa_1)e$, und da hier $\eta_0^{p^{\nu_0}}$ und $(\eta_1^{(0)})^{p^{\nu_0}}$ denselben Grad besitzen, so ergibt sich hier die Relation

$$(6^a.) \qquad \delta_1 p^{\varkappa_1} - \delta p^{\nu_0} + (\nu_0 - \varkappa_1)e = t > 0,$$

welche mit (6.) vollständig übereinstimmt, wenn dort $\varkappa$ durch ν_0 ersetzt wird. Daraus folgt, daß auch sie dann und nur dann erfüllt ist, wenn $\delta_1 > \delta$ ist; q. e. d.

Hieraus ergibt sich zunächst, daß in dem Fundamentalsystem $(\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_\lambda)$ das irreguläre Element $\eta_0 = 1 + w^{g_0}\pi^{e_0}$ von vornherein durch das ihm äquivalente $\eta_0\eta_1^{(0)} = 1 + w^{g_0}\pi^{e_0} + \cdots$ ersetzt werden kann, welches zwar nicht aus zwei, aber sicher aus einer endlichen Anzahl von direkt berechenbaren Gliedern besteht. Dies soll von jetzt an vorausgesetzt werden; dann fällt für dieses neue Element η_0 in unserer Relation das Glied $\eta_1^{(0)}$ fort.

Ich zeige jetzt zweitens, daß in unserem Fundamentalsysteme $(\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_\lambda)$ die regulären Elemente $\eta_1, \ldots \eta_\lambda$ von vornherein so gewählt werden können, daß die ε regulären Produkte $\eta^{(i)}\eta_1^{(i)}$ mit gewissen ε unter ihnen identisch sind. In der Tat ist ja, z. B. die Einheit $\eta^{(1)}$ des ersten Produktes nach (3.) im allgemeinen folgendermaßen darstellbar:

$$(7.) \quad \eta^{(1)} = \eta_1^{c_1}\eta_2^{c_2}\ldots\eta_f^{c_f} = (1 + w_1\pi^k)^{c_1}\ldots(1 + w_f\pi^k)^{c_f} = 1 + w^{(1)}\pi^k + \ldots,$$

wo mit $(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_f)$ die zu dem betreffenden Grade k gehörende Basis bezeichnet ist und

(8.) $$w^{(1)} = c_1 w_1 + c_2 w_2 + \cdots + c_f w_f \qquad (c_i = 0, 1, \ldots p-1)$$

der Koeffizient des Hauptgliedes von $\eta^{(1)}$ ist. Ist hier nun z. B. c_1 nicht Null, so kann in jener f-gliedrigen Basis η_1 zunächst durch $\eta^{(1)} = 1 + w^{(1)}\pi^k + \cdots$ ersetzt werden, weil dann auch $(w^{(1)}, w_2, \ldots w_f) \backsim (w_1, w_2, \ldots w_f)$ ein Fundamentalsystem modulo $\mathfrak{p}$ ist; und an seine Stelle kann endlich das ihm äquivalente $\overline{\eta}_1 = \eta^{(1)} . \eta_1^{(1)}$ treten. Dann besitzt das neue System $(\eta_0, \overline{\eta}_1, \ldots \eta_\lambda)$ genau dieselben Eigenschaften wie das alte, und in unserer Relation (5.) ist an die Stelle des Produktes $(\eta^{(1)}\eta_1^{(1)})^{p^{\nu_1}}$ die Potenz $\overline{\eta}_1^{p^{\nu_1}}$ getreten, deren Basis $\overline{\eta}_1$ nun ein reguläres Element unseres Fundamentalsystemes ist, welches zwar nicht aus zwei, aber sicher nur aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht.

Auch in dem speziellen Falle (3ª.) kann das entsprechende Resultat leicht abgeleitet werden; dann ist nämlich $\eta^{(1)}$ in einer der beiden Formen darstellbar

(9.) $$\eta^{(1)} = \eta_1^{c_1 p^{\nu_0}} \ldots \eta_{f-1}^{c_{f-1} p^{\nu_0}} \eta_f^{c_f} \quad \text{oder} \quad \eta^{(1)} = \eta_1^{c_1} \ldots \eta_{f-1}^{c_{f-1}};$$

der zweite Fall fällt mit dem vorher behandelten vollständig zusammen; im ersten besitzt das Hauptglied von $\eta^{(1)}$ den Koeffizienten

(10.) $$w^{(1)} = c_1 w_1^{p^{\nu_0}} + \cdots + w_{f-1} w_{f-1}^{p^{\nu_0}} + c_f w_f,$$

in welchem $c_f > 0$ ist; hier kann daher wieder η_f durch $\eta^{(1)} = 1 + w^{(1)}\pi^{e_0 p^{\nu_0}} + \cdots$, und dieses wie vorher durch das äquivalente $\overline{\eta}_1 = (\eta^{(1)}\eta_1^{(1)})$ ersetzt werden, welches wieder nur aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht.

Wendet man dieselben Transformationen auf alle $\varepsilon + 1$ Elemente $(\eta^{(i)}\eta_1^{(i)})$ an, so ergibt sich an Stelle des ursprünglichen Fundamentalsystemes ein neues, in welchem $\varepsilon + 1$ Elemente durch andere ersetzt sind, die sich von den vorigen nur dadurch unterscheiden, daß sie nicht wie jene aus zwei, sondern aus mehr als zwei Gliedern bestehen. Sie alle enthalten aber bis auf das letzte nur eine endliche Anzahl von leicht berechenbaren Gliedern; nur das letzte aus dem Produkte $\eta^{(\varepsilon)}\eta_1^{(\varepsilon)}$ hervorgehende wird im allgemeinen aus unendlich vielen Gliedern bestehen, weil $\eta_1^{(\varepsilon)}$ nicht abbricht.

Ich setze nun voraus, daß schon das ursprüngliche Fundamentalsystem das hier erhaltene ist, und bezeichne dieses durch $(\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_\varepsilon, \ldots \eta_\lambda)$, dann besteht zwischen seinen Elementen die einfachere Relation

(11.) $$\eta_0^{p^{\nu_0}} \eta_1^{p^{\nu_1}} \cdots \eta_\varepsilon^{p^{\nu_\varepsilon}} = 1,$$

in welcher $\nu_0 > \nu_1 > \cdots > \nu_\varepsilon$ ist und die Grade von $\eta_0^{p^{\nu_0}}, \eta_1^{p^{\nu_1}}, \eta_2^{p^{\nu_2}}, \ldots \eta_\varepsilon^{p^{\nu_\varepsilon}}$ der Reihe nach $(s_1, s_1, s_2, \ldots s_\varepsilon)$ sind, wo

(12.) $$s_1 < s_2 < \cdots < s_\varepsilon$$

ist. Alle ε in dieser Relation auftretenden regulären Einheiten $\eta_i = 1 + w_i \pi^{k_i} + \cdots$ sind von verschiedenem Grade k_i, ihre Anzahl kann also höchstens gleich e sein. Hätten nämlich etwa die beiden regulären Einheiten η_1 und η_2 denselben Grad k, so könnte der Grad s_2 von $\eta_2^{p^{\nu_2}}$ nur dann größer sein als der Grad s_1 von $\eta_1^{p^{\nu_1}}$, wenn $\nu_2 > \nu_1$ wäre, was nicht der Fall ist.

§ 3.

Die irregulären Einseinheiten vom größten Irregularitätsgrade und die p-ten Einheitswurzeln im Körper $K(\mathfrak{p})$.

Das am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundene Fundamentalsystem $(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\lambda)$, zwischen dessen Elementen die reduzierte Fundamentalrelation

(1.) $$\eta_0^{p^{\nu_0}} \eta_1^{p^{\nu_1}} \ldots \eta_\varepsilon^{p^{\nu_\varepsilon}} = 1$$

besteht, ermöglicht nun eine genaue Untersuchung der irregulären Einseinheiten von den Graden $e_0, e_0 p, \ldots e_0 p^{\nu_0 - 1}$ und die Bestimmung des größten Irregularitätsgrades s, den eine solche Einheit eines vorgelegten Grades $k = e_0 p^{\varrho_0}$ überhaupt besitzen kann.

Jede irreguläre Einheit η vom Grade $e_0 p^{\varrho_0}$ gehört, wie in § 1 gezeigt wurde, zum Irregularitätsexponenten p^{μ_0}, wo $\mu_0 = \nu_0 - \varrho_0$ gesetzt ist. Dann kann man sofort mit Hülfe von (1.) eine irreguläre Einheit dieses Grades vom höchsten Irregularitätsgrade angeben. Es seien nämlich in dieser Relation $\nu_0, \nu_1, \ldots \nu_c$ diejenigen unter den Exponenten ν_i, welche größer oder gleich μ_0 sind. Dann behaupte ich, daß die Einheit

(2.) $$\eta = \eta_0^{p^{\nu_0 - \mu_0}} \eta_1^{p^{\nu_1 - \mu_0}} \ldots \eta_c^{p^{\nu_c - \mu_0}}$$

die verlangten Eigenschaften hat. Zunächst folgt aus dieser Darstellung und der Relation (1.) unmittelbar die Gleichung:

(2ª.) $$\eta^{p^{\mu_0}} = \eta_0^{p^{\nu_0}} \eta_1^{p^{\nu_1}} \ldots \eta_c^{p^{\nu_c}} = \eta_{c+1}^{-p^{\nu_c + 1}} \ldots \eta_\varepsilon^{-p^{\nu_\varepsilon}},$$

und aus ihr geht durch Betrachtung ihres dritten Gliedes hervor, daß $\eta^{p^{\mu_0}}$ genau vom Grade s_{c+1} ist. Hieraus folgt weiter, daß $\eta \backsim \eta_0^{p^{\nu_0 - \mu_0}}$ sein muß, also wirklich irregulär vom Grade $e_0 p^{\varrho_0}$ ist; denn sonst müßte η einer der c folgenden regulären Einheiten $\eta_i^{p^{\nu_i - \mu_0}}$ äquivalent, mithin $\eta_0^{p^{\mu_0}} \backsim \eta_i^{p^{\nu_i}}$, d. h. vom Grade s_i sein, während der Grad von $\eta_0^{p^{\mu_0}}$ wirklich größer, nämlich gleich s_{c+1} ist.

Endlich zeige ich jetzt, daß keine irreguläre Einheit $\bar{\eta}$ von gleichem Grade $e_0 p^{\varrho_0}$ einen höheren Irregularitätsgrad besitzen kann als η. In der

Tat muß ja dann $\overline{\eta} \sim \eta_0^{d_0}$ sein, wo d_0 eine Einheit bedeutet; jene Einheit kann also sicher in der Form geschrieben werden:

$$\overline{\eta} = \eta^{d_0} \eta_1^{d_1} \dots \eta_\lambda^{d_\lambda},$$

wo $d_1, \dots d_\lambda$ solche ganzen Zahlen bedeuten, daß jedes $\eta_i^{d_i}$ von höherem als dem $e_0 p^{\varrho_0}$-ten Grade ist. Erhebt man aber diese Gleichung zur p^{μ_0}-ten Potenz, so ergibt sich unter Benutzung von (2ª.):

$$\overline{\eta}^{p^{\mu_0}} = (\eta^{p^{\mu_0}})^{d_0} \eta_1^{p^{\mu_0} d_1} \dots \eta_{c+1}^{p^{\mu_0} d_{c+1}} \dots = \eta_1^{p^{\mu_0} d_1} \dots \eta_{c+1}^{p^{\mu_0} d_{c+1} - p^{\nu_{c+1}} d_0} \dots .$$

Da nun in dem rechts stehenden Produkte der $(c+1)$-te Faktor sicher genau die Ordnung s_{c+1} von $\eta_{c+1}^{-p^{\nu_{c+1}}}$ besitzt, weil d_0 eine Einheit und $\nu_{c+1} < \mu_0$ ist, so hat $\overline{\eta}^{p^{\mu_0}}$ entweder dieselbe oder eine kleinere Ordnungszahl; also ist unsere Behauptung bewiesen.

So ergibt sich eine vollständige Basis $(\overline{\eta}_0, \overline{\eta}_1, \dots \overline{\eta}_\varepsilon)$ für die irregulären Einheiten im Körper $K(\mathfrak{p})$, deren Elemente mit den $\varepsilon + 1$ Einheiten $(\eta_0, \eta_1, \dots \eta_\varepsilon)$ durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\overline{\eta}_0 &= \eta_0 \\
\overline{\eta}_1 &= \eta_0^{p^{\nu_0 - \nu_1}} \eta_1 \\
\overline{\eta}_2 &= \eta_0^{p^{\nu_0 - \nu_2}} \eta_1^{p^{\nu_1 - \nu_2}} \eta_2 \\
&\vdots \\
\overline{\eta}_\varepsilon &= \eta_0^{p^{\nu_0 - \nu_\varepsilon}} \eta_1^{p^{\nu_1 - \nu_\varepsilon}} \eta_2^{p^{\nu_2 - \nu_\varepsilon}} \dots \eta_\varepsilon
\end{aligned} \qquad (3.)$$

zusammenhängen; ihre Auflösung nach $\eta_0, \eta_1, \dots \eta_\varepsilon$ liefert die einfachen Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \overline{\eta}_0 \\
\eta_1 &= \overline{\eta}_1 : \overline{\eta}_0^{p^{\nu_0 - \nu_1}} \\
\eta_2 &= \overline{\eta}_2 : \overline{\eta}_1^{p^{\nu_1 - \nu_2}} \\
&\dots\dots\dots\dots \\
\eta_\varepsilon &= \overline{\eta}_\varepsilon : \overline{\eta}_{\varepsilon-1}^{p^{\nu_\varepsilon - 1 - \nu_\varepsilon}} .
\end{aligned} \qquad (3ª.)$$

Aus (2.) folgt, daß die ν_0 Potenzen:

$$(4.) \quad \overline{\eta}_0, \overline{\eta}_0^{p}, \dots \overline{\eta}_0^{p^{\nu_0 - \nu_1 - 1}}; \ \overline{\eta}_1, \dots \overline{\eta}_1^{p^{\nu_1 - \nu_2 - 1}}; \ \dots; \ \overline{\eta}_\varepsilon, \overline{\eta}_\varepsilon^{p}, \dots \overline{\eta}_\varepsilon^{p^{\nu_\varepsilon - 1}}$$

ein System irregulärer Einheiten für die ν_0 möglichen Grade

$$e_0, e_0 p, \dots e_0 p^{\nu_0 - \nu_1 - 1}; \ e_0 p^{\nu_0 - \nu_1}, \dots e_0 p^{\nu_0 - \nu_2 - 1}; \ \dots; \ e_0 p^{\nu_0 - \nu_\varepsilon}, e_0 p^{\nu_0 - \nu_\varepsilon + 1}, \dots e_0 p^{\nu_0 - 1}$$

liefern, welche die größten möglichen Irregularitätsgrade besitzen; diese Grade sind der Reihe nach:

$$s_1, s_1, \dots s_1; \ s_2, \dots s_2; \dots; \ \infty, \infty \dots \infty.$$

Die letzte Einheit $\overline{\eta}_\varepsilon$ ist also eine primitive p^{ν_ε}-te Einheitswurzel, und es zeigt sich auch hier, daß sie die Einheitswurzel höchster Ordnung ist, deren Grad eine Potenz von p ist. Da p^{ν_ε} offenbar der größte gemeinsame Teiler der

p-adischen Zahlen $(d_0, d_1, \ldots d_\lambda)$ in (3.) a. S. 2 ist, so stimmt das hier gefundene Resultat mit demjenigen, welches H^1 a. S. 210 (6.) abgeleitet wurde, überein.

Aus den Gleichungen (3.) folgt weiter, daß auch diese Einseinheiten $\overline{\eta}_0, \overline{\eta}_1, \ldots \overline{\eta}_{\varepsilon-1}$ ebenso, wie $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_{\varepsilon-1}$ nur aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehen, welche durch ein endliches Verfahren in jedem speziellen Falle bestimmt werden können, daß jedoch nicht dasselbe für das letzte Element $\overline{\eta}_\varepsilon$ gilt. Aber auch diese letzte Einseinheit kann durch einen geschlossenen Ausdruck dargestellt werden, welcher nur Wurzelzeichen enthält, da er eine primitive p^{ν_ε}-te Einheitswurzel ist.

Man kann nun leicht zeigen, daß das bisher betrachtete Fundamentalsystem $(\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_\lambda)$ in ein äquivalentes übergeht, wenn man seine $(\varepsilon + 1)$ ersten Elemente durch diese neu eingeführten Einheiten $\overline{\eta}_0, \overline{\eta}_1, \ldots \overline{\eta}_\varepsilon$ ersetzt. In der Tat kann jede durch das erste System multiplikativ darstellbare Einseinheit auch durch das zweite dargestellt werden, denn aus den Relationen (3ª.) ergibt sich leicht die Gleichung:

$$(5.) \qquad \eta_0^{c_0}\eta_1^{c_1}\ldots\eta_\varepsilon^{c_\varepsilon}\eta_{\varepsilon+1}^{c_{\varepsilon+1}}\ldots\eta_\lambda^{c_\lambda} = \overline{\eta}_0^{\bar{c}_0}\overline{\eta}_1^{\bar{c}_1}\ldots\overline{\eta}_\varepsilon^{\bar{c}_\varepsilon}\eta_{\varepsilon+1}^{c_{\varepsilon+1}}\ldots\eta_\lambda^{c_\lambda},$$

wo die p-adischen Zahlen $c_0, c_1, \ldots c_\varepsilon$ und $\bar{c}_0, \ldots \bar{c}_\varepsilon$ miteinander durch die folgenden Gleichungen zusammenhängen:

$$(5ª.) \quad \bar{c}_0 = c_0 - p^{\nu_0-\nu_1}c_1,\ \bar{c}_1 = c_1 - p^{\nu_1-\nu_2}c_2,\ \ldots\ \bar{c}_{\varepsilon-1} = c_{\varepsilon-1} - p^{\nu_{\varepsilon-1}-\nu_\varepsilon}c_\varepsilon,\ \bar{c}_\varepsilon = c_\varepsilon.$$

Aus ihnen folgt nun erstens, daß jede Einseinheit η, welche ja durch das erste System mit ganzzahligen Exponenten darstellbar ist, auch durch das zweite ganzzahlig dargestellt werden kann, denn jedem ganzzahligen p-adischen Systeme $(c_0, \ldots c_\varepsilon, c_{\varepsilon+1}, \ldots c_\lambda)$ entspricht ja nach den obigen Gleichungen eindeutig ein ganzzahliges System $(\bar{c}_0, \ldots \bar{c}_\varepsilon, c_{\varepsilon+1}, \ldots c_\lambda)$ und umgekehrt.

Zweitens war aber bewiesen worden, daß stets und nur dann $\eta = \eta_0^{c_0}\ldots\eta_\varepsilon^{c_\varepsilon}\ldots\eta_\lambda^{c_\lambda} = 1$ ist, wenn $\eta = (\eta_0^{p^{\nu_0}}\eta_1^{p^{\nu_1}}\ldots\eta_\varepsilon^{p^{\nu_\varepsilon}})^t$ ist, wenn also für die $\lambda + 1$ Exponenten c_i die Bedingungen:

$$c_0 = p^{\nu_0}t, \ldots c_\varepsilon = p^{\nu_\varepsilon}t, \qquad c_{\varepsilon+1} = 0, \ldots c_\lambda = 0$$

sämtlich erfüllt sind. Hieraus folgt, daß bei der Darstellung durch das zweite System stets und nur dann

$$\eta = \overline{\eta}_0^{\bar{c}_0}\ldots\overline{\eta}_\varepsilon^{\bar{c}_\varepsilon}\eta_{\varepsilon+1}^{c_{\varepsilon+1}}\ldots\eta_\lambda^{c_\lambda} = 1$$

ist, wenn für $i = 0, 1, \ldots \varepsilon - 1$

$$(6.) \qquad \bar{c}_i = c_i - p^{\nu_i-\nu_{i+1}}c_{i+1} = p^{\nu_i}t - p^{\nu_i}t = 0$$

und allein

$$(6ª.) \qquad \bar{c}_\varepsilon = c_\varepsilon = p^{\nu_\varepsilon}t$$

ist, während auch alle folgenden Exponenten $c_{\varepsilon+1} = c_{\varepsilon+2} = \cdots = c_\lambda$ gleich Null sein müssen. Nur dann ist also $\eta = 1$, wenn $\eta = (\overline{\eta}_\varepsilon^{p^{\nu_\varepsilon}})^t$ ist, wo t eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Jede Einseinheit η ist hiernach eindeutig in der Form:

$$\eta = \overline{\eta}_0^{\bar{c}_0}\, \overline{\eta}_1^{\bar{c}_1} \cdots \overline{\eta}_{\varepsilon-1}^{\bar{c}_{\varepsilon-1}}\, \overline{\eta}_\varepsilon^{\bar{c}_\varepsilon}\, \eta_{\varepsilon+1}^{c_{\varepsilon+1}} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda}$$

darstellbar, in der alle Exponenten bis auf $\bar{c}_\varepsilon$ beliebige ganze p-adische Zahlen sind, während $\bar{c}_\varepsilon$ eine der Zahlen $0, 1, \ldots (p^{\nu_\varepsilon} - 1)$ bedeutet.

§ 4.

Die Kongruenzklassengruppe modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ im Körper $K(\mathfrak{p})$.

Es sollen jetzt die ganzen Zahlen von $K(\mathfrak{p})$ auch in diesem Falle für eine beliebige Primteilerpotenz $\mathfrak{p}^{s+1}$ als Modul untersucht und die Invarianten der zugehörigen Kongruenzklassengruppe gefunden werden. Da nun das System $(\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_\lambda)$ auch hier so beschaffen ist, daß sich aus den Potenzen seiner Elemente Basissysteme $(\overset{(1)}{\eta})$, $(\overset{(2)}{\eta})$, $(\overset{(3)}{\eta})$, ... für die Einheiten des ersten, zweiten, dritten, ... Grades bilden lassen, so beweist man genau, wie dies in H^{II} S. 219 geschah, daß jede Einseinheit von $K(\mathfrak{p})$ modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ einer einzigen unter den $n(\mathfrak{p}^s)$ Zahlen:

$$\text{(1.)} \qquad \eta_0^{c_0} \eta_1^{c_1} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda} \qquad \begin{pmatrix} c_0 < (p^{\mu_0}, p^{\nu_0}) \\ c_i < p^{\mu_i} \end{pmatrix}$$

kongruent ist. Hier bedeuten allgemein $p^{\mu_0}, p^{\mu_1}, \ldots p^{\mu_\lambda}$ die Exponenten, zu denen $\eta_0, \eta_1, \ldots \eta_\lambda$ modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ gehören, und (p^{μ_0}, p^{ν_0}) den größten gemeinsamen Teiler dieser beiden Exponenten; ist nämlich $p^{\nu_0} > p^{\mu_0}$, so ist ja in der Potenz $\eta_0^{c_0}$ der Exponent c_0 modulo p^{μ_0} auf seinen kleinsten Rest zu reduzieren, da seine folgenden Glieder bereits kongruent Eins sind.

Betrachtet man die zwischen den Elementen η_i bestehende Relation jetzt ebenfalls nur modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$, läßt man also alle durch diesen Modul teilbaren Potenzen fort, so möge sie in

$$\text{(1}^{\text{a}}\text{.)} \qquad \overline{\eta} = \eta_0^{p^{\nu_0}} \eta_1^{p^{\nu_1}} \cdots \eta_k^{p^{\nu_k}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{s+1}}$$

übergehen, wo also der Grad s_k von $\eta_k^{p^{\nu_k}}$ der letzte ist, welcher noch kleiner als $s+1$ ist, so daß:

$$\text{(1}^{\text{b}}\text{.)} \qquad s_k < s+1 \leqq s_{k+1}$$

wird, mit der Maßgabe, daß für $k = \varepsilon$ die Ordnungszahl $s_{k+1} = \infty$ zu setzen ist, dagegen für $k+1 = 1$ $s_0 = 0$ gesetzt werden kann.

Dann erkennt man ohne weiteres die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Eine Einheit

$$\eta = \eta_0^{c_0} \eta_1^{c_1} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda} \qquad \begin{pmatrix} c_0 < p^{\mu_0} \\ c_i < p^{\mu_i} \end{pmatrix}$$

ist stets und nur dann kongruent Eins modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$, wenn ihre Exponenten die Bedingung:

$$(2.) \qquad \begin{gathered} c_0 \equiv p^{\nu_0} t \pmod{p^{\mu_0}}, \dots c_k \equiv p^{\nu_k} t \pmod{p^{\mu_k}}, \\ c_{k+1} \equiv 0 \pmod{p^{\mu_{k+1}}}, \dots c_\lambda \equiv 0 \pmod{p^{\mu_\lambda}} \end{gathered}$$

erfüllen, wo t eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Dividiert man nämlich η durch eine ganzzahlige Potenz $\overline{\eta}^t$ von $\overline{\eta} = 1$, so kann man in der sich so ergebenden Kongruenz

$$\eta = \eta_0^{c_0 - p^{\nu_0} t} \dots \eta_k^{c_k - p^{\nu_k} t} \eta_{k+1}^{c_{k+1}} \dots \eta_\lambda^{c_\lambda} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{s+1}}$$

t stets so wählen, daß $c_0 - p^{\nu_0} t < p^{\nu_0}$ wird, und da diese Kongruenz nach (3.) a. S. 2 nur erfüllt sein kann, wenn alle Exponenten durch die betreffenden Potenzen p^{μ_i} von p teilbar sind, so ist unsere Behauptung bewiesen.

Aus den bisherigen Betrachtungen folgt nun sofort, daß das System $(\eta_0, \eta_1, \dots \eta_\lambda)$ dann und nur dann eine Basis für die Kongruenzklassengruppe modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ bildet, wenn $s + 1 \leqq s_1$ ist; allein in diesem Falle ist nämlich $\eta_0^{p^{\nu_0}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{s+1}}$, d. h. der Exponent p^{μ_0}, zu dem η_0 gehört, ist gleich oder kleiner als p^{ν_0}; also ist in (1.) $(p^{\mu_0}, p^{\nu_0}) = p^{\mu_0}$, und jede Einseinheit η ist einer einzigen unter den Zahlen (1.) kongruent, für welche jede der $\lambda + 1$ Zahlen c_i ein vollständiges Restsystem nach demjenigen Exponenten p^{μ_i} durchläuft, zu dem das zugehörige η_i modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ gehört. Dies gilt, da $s_1 > r + e$ ist, sicher für alle Moduln $\mathfrak{p}^{s+1}$, deren Exponenten gleich oder kleiner als $r + e$ sind.

Ist dagegen $s + 1 > s_1$, so ist $p^{\nu_0} < p^{\mu_0}$, und $(\eta_0, \eta_1, \dots \eta_\lambda)$ ist sicher kein Fundamentalsystem für jene Gruppe, da c_0 in (1.) ja nur ein vollständiges Restsystem modulo p^{ν_0}, nicht aber ein solches modulo p^{μ_0} durchläuft.

Ich betrachte jetzt den allgemeinsten Fall, daß:

$$s_k < s + 1 \leqq s_{k+1}$$

ist, und beweise den folgenden Hauptsatz, durch den diese ganze Frage vollständig und ausnahmslos entschieden wird:

Unter dieser Voraussetzung bilden die $(\lambda + 1)$ Elemente:

$$(3.) \qquad \overline{\eta}_0, \overline{\eta}_1, \dots \overline{\eta}_k, \eta_{k+1}, \dots \eta_\lambda,$$

in denen die $k + 1$ ersten Elemente des Systems (η_i) durch die entsprechenden Elemente in (3.) a. S. 9 ersetzt sind, ein vollständiges Fundamentalsystem für die Kongruenzklassengruppe aller Einseinheiten modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$. Sind nämlich

$$(3^a.) \qquad p^{\overline{\mu}_0}, p^{\overline{\mu}_1}, \dots p^{\overline{\mu}_k}, p^{\mu_{k+1}}, \dots p^{\mu_\lambda}$$

die Exponenten, zu denen diese Einseinheiten modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ gehören,

so ist jede Einseinheit für diesen Modul einer einzigen unter den $p^{\mu_0 + \cdots + \bar{\mu}_k + \mu_{k+1} + \cdots + \mu_\lambda}$ Zahlen

$$\bar{\eta}_k^{\bar{c}_0} \cdots \bar{\eta}_k^{\bar{c}_k} \eta_{k+1}^{c_{k+1}} \cdots \eta_\lambda^{c_\lambda} \qquad \begin{pmatrix} \bar{c}_h < p^{\bar{\mu}_h} \\ c_{k+i} < p^{\mu_{k+i}} \end{pmatrix}$$

kongruent. Die Potenzen (3ª.) sind also die gesuchten $\lambda + 1$ Invarianten jener Gruppe.

Zum Beweise dieses Satzes bestimme ich zuerst die Exponenten p^{μ_i} und $p^{\bar{\mu}_i}$, zu denen die Elemente $(\eta_0, \ldots \eta_k)$ und $(\bar{\eta}_0, \ldots \bar{\eta}_k)$ modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ gehören. Da nun allgemein $\eta_i^{p^{\nu_i}} = 1 + w\pi^{s_i} + \cdots$ und n. d. V. $s_i < s+1$ ist, so gehört η zum Exponenten $p^{\nu_i + t_i}$, wenn t_i der kleinste positive Exponent ist, für welchen

(4.) $$s_i + t_i e \geqq s + 1$$

ist. Hier ist speziell $t_0 = t_1$, da $\eta_0^{p^{\nu_0}}$ und $\eta_0^{p^{\nu_1}}$ denselben Grad s_1 haben. Man erkennt leicht, daß in der Reihe $p^{\nu_0+t_1}, p^{\nu_1+t_1}, p^{\nu_2+t_2}, \ldots p^{\nu_k+t_k}$ der so bestimmten Potenzen $t_1 \geqq t_2 \geqq \cdots t_k$ ist. In der Tat ist ja für die vor η_i stehende Einheit η_{i-1} sicher $s_{i-1} + t_{i-1} e \geqq s+1$, und da $s_i > s_{i-1}$ ist, so ergibt sich

$$s_i + t_{i-1} e > s_{i-1} + t_{i-1} e \geqq s + 1;$$

da also t_{i-1} sicher der Bedingung (4.) genügt, so ist in der Tat $t_i \leqq t_{i-1}$.

Ebenso leicht bestimmt man die Exponenten $p^{\bar{\mu}_0}, \ldots p^{\bar{\mu}_k}$, zu denen die Einheiten $\bar{\eta}_0, \ldots \bar{\eta}_k$ gehören. Da nämlich allgemein wegen der Kongruenz (1ª.)

$$\bar{\eta}_i^{p^{\nu_i}} = \eta_0^{p^{\nu_0}} \ldots \eta_i^{p^{\nu_i}} \equiv \eta_{i+1}^{-p^{\nu_i+1}} \ldots \eta_k^{-p^{\nu_k}} \pmod{\mathfrak{p}^{s+1}}$$

gilt, so ist $\bar{\eta}_i^{p^{\nu_i}} \backsim \eta_{i+1}^{-p^{\nu_i+1}} = 1 + w\pi^{s_{i+1}} + \cdots$, und hieraus folgt, daß der Exponent $p^{\bar{\mu}_i}$, zu dem $\bar{\eta}_i$ gehört, gleich $p^{\nu_i + t_{i+1}}$ sein muß, wo t_{i+1} die vorige Bedeutung hat. Ist speziell $i = k$, so ist $p^{\bar{\mu}_k} = p^{\nu_k}$, weil $\bar{\eta}_k^{p^{\nu_k}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{s+1}}$ ist, während

$$\bar{\eta}_k^{p^{\nu_k - 1}} = \eta_0^{p^{\nu_0 - 1}} \eta_1^{p^{\nu_1 - 1}} \ldots \eta_k^{p^{\nu_k - 1}}$$

noch nicht durch $\mathfrak{p}^{s+1}$ teilbar sein kann, weil speziell $\eta_0^{p^{\nu_0 - 1}}$ von niedrigerem als dem $(r+e)$-ten Grade ist. Hiernach kann also auch $p^{\bar{\mu}_k} = p^{\nu_k + t_{k+1}}$ gesetzt werden, wo aber $t_{k+1} = 0$ anzunehmen ist. So ergibt sich also der Satz:

Die Exponenten $p^{\mu_0}, p^{\mu_1}, \ldots p^{\mu_k}$ und $p^{\bar{\mu}_0}, p^{\bar{\mu}_1}, \ldots p^{\bar{\mu}_k}$, zu denen die Elemente

(5.) $$(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_k) \text{ und } (\bar{\eta}_0, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots \bar{\eta}_k)$$

modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ gehören, sind

(5ª.) $(p^{\nu_0+t_1}, p^{\nu_1+t_1}, p^{\nu_2+t_2}, \ldots p^{\nu_k+t_k})$ und $(p^{\nu_0+t_1}, p^{\nu_1+t_2}, p^{\nu_2+t_3}, \ldots p^{\nu_k})$,

wo allgemein:

(5ᵇ.) $$\nu_0 > \nu_1 > \cdots > \nu_k, \text{ und } t_1 \geqq t_2 \geqq \cdots \geqq t_k$$

ist.

Jede Einseinheit η ist nun durch diese beiden Systeme in der Form:

$$(6.)\qquad \eta = \eta_0^{c_0} \dots \eta_k^{c_k} \dots \eta_\lambda^{c_\lambda} = \overline{\eta}_0^{\bar{c}_0} \overline{\eta}_1^{\bar{c}_1} \dots \overline{\eta}_k^{\bar{c}_k} \eta_{k+1}^{c_{k+1}} \dots \eta_\lambda^{c_\lambda}$$

darstellbar, wo nach (6.) und (6ª.) a. S. 10 die Exponenten $c_0, \dots c_k$ und $\bar{c}_0, \dots \bar{c}_k$ mit einander durch die Gleichungen:

$$(6^a.)\qquad \begin{aligned} \bar{c}_i &= c_i - p^{\nu_i - \nu_{i+1}} c_{i+1} \\ \bar{c}_k &= c_k \end{aligned} \qquad (i = 0, 1, \dots k-1)$$

verbunden sind. Ferner war nach (2.) dann und nur dann $\eta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{s+1}}$, wenn für ihre Exponenten c_i die Kongruenzen

$$c_i \equiv p^{\nu_i} t \pmod{p^{\mu_i} = p^{\nu_i + t_i}} \quad c_{k+l} \equiv 0 \pmod{p^{\mu_{k+l}}}$$

bestehen, oder die Gleichungen:

$$c_i = p^{\nu_i} t + p^{\nu_i + t_i} \varrho_i \qquad (i = 0, 1, \dots k)$$

erfüllt sind, wo t und die ϱ_i ganze Zahlen bedeuten. Dann müssen also für die entsprechenden Exponenten $\bar{c}_i$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \bar{c}_i &= c_i - p^{\nu_i - \nu_{i+1}} c_{i+1} \\ &= (p^{\nu_i} t + \varrho_i p^{\nu_i + t_i}) - (p^{\nu_{i+1}} t + \varrho_{i+1} p^{\nu_{i+1} + t_{i+1}}) p^{\nu_i - \nu_{i+1}} \\ &= \varrho_i p^{\nu_i + t_i} - \varrho_{i+1} p^{\nu_i + t_{i+1}}, \end{aligned}$$

also, da $t_{i+1} \leqq t_i$ ist, die Kongruenzen:

$$\bar{c}_i \equiv 0 \pmod{p^{\nu_i + t_{i+1}} = p^{\bar{\mu}_i}}, \quad c_{k+l} \equiv 0 \pmod{p^{\mu_{k+l}}}$$

sämtlich erfüllt sein, damit $\eta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{s+1}}$ ist. Sind sie aber erfüllt, so ist auch $\eta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{s+1}}$, da dann jeder von den Faktoren $\overline{\eta}_i^{\bar{c}_i}$ und $\eta_{i+l}^{c_{i+l}}$ für sich die gleiche Eigenschaft hat.

Hiernach sind je zwei in der Form

$$\eta = \overline{\eta}_0^{\bar{c}_0} \dots \overline{\eta}_k^{\bar{c}_k} \eta_{k+1}^{c_{k+1}} \dots \eta_\lambda^{c_\lambda} \qquad \begin{pmatrix} \bar{c}_i < p^{\bar{\mu}_i} \\ c_{k+l} < p^{\mu_{k+l}} \end{pmatrix}$$

dargestellte Einseinheiten modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ inkongruent, da sonst ihr Quotient kongruent Eins sein müßte. Die Anzahl dieser inkongruenten Einheiten:

$$p^{\bar{\mu}_0 + \dots + \bar{\mu}_k + \mu_{k+1} + \dots + \mu_\lambda} = p^{(\nu_0 + t_1) + (\nu_1 + t_2) + \dots + (\nu_{k-1} + t_k) + \nu_k + \mu_{k+1} + \dots + \mu_\lambda}$$

ist aber gleich der Anzahl

$$p^{\nu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_k + \mu_{k+1} + \dots + \mu_\lambda} = p^{\nu_0 + (\nu_1 + t_1) + \dots + (\nu_k + t_k) + \mu_{k+1} + \dots + \mu_\lambda}$$

aller inkongruenten Einheiten von $K(\mathfrak{p})$, wenn sie in der Form

$$\eta_0^{c_0} \eta_1^{c_1} \dots \eta_\lambda^{c_\lambda} \qquad \begin{pmatrix} c_0 < p^{\nu_0} \\ c_i < p^{\mu_i} \end{pmatrix}$$

dargestellt sind. Damit ist also der Beweis unseres Hauptsatzes vollständig erbracht.

Für die ganze Kongruenzklassengruppe modulo $\mathfrak{p}^{s+1}$ bilden also die $\lambda + 2$ Zahlen

$$(w, \overline{\eta}_0, \dots \overline{\eta}_k, \eta_{k+1}, \dots \eta_\lambda)$$

ein Fundamentalsystem, wenn der Exponent $s+1$ eine der Zahlen

$$s_k + 1,\ s_k + 2, \ldots s_{k+1}$$

ist, wo allgemein s_i den Grad von $\eta_i^{p^{\nu_i}}$ bedeutet, und die Invarianten jener Gruppe sind die Zahlen:

$$(p^f - 1),\ p^{\nu_0+t_1},\ p^{\nu_1+t_2}, \ldots p^{\nu_{k-1}+t_k},\ p^{\nu_k},\ p^{\mu_{k+1}}, \ldots p^{\mu_\lambda},$$

wo allgemein p^{ν_i} den Exponenten von η_i in der Fundamentalrelation und t_i die kleinste Zahl bedeutet, für welche $s_i + t_i e \geqq s + 1$ ist. Ist $s+1$ eine der Zahlen $1, 2, \ldots s_1$, so ist $(w, \eta_0, \ldots \eta_\lambda)$ selber das gesuchte Fundamentalsystem, wie in dem in H^{II} behandelten regulären Falle. Für alle oberhalb s_ε liegenden unendlich vielen Exponenten bleiben die Zahlen $(w, \overline{\eta}_0, \ldots \overline{\eta}_\varepsilon, \eta_{\varepsilon+1} \ldots \eta_\lambda)$ immer ein Fundamentalsystem.

Die Elemente dieses Systems bestehen, mit einziger Ausnahme der Einheitswurzeln w und $\overline{\eta}_\varepsilon$, aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, welche durch das in § 2 auseinandergesetzte endliche Verfahren in jedem speziellen Falle vollständig und einfach berechnet werden können. Aber auch diese Einheitswurzeln selbst lassen sich, da sie primitive Wurzeln der beiden Kreisteilungsgleichungen:

$$x^{p^f-1} = 1 \quad \text{und} \quad x^{p^{\nu_\varepsilon}} = 1$$

sind, auch direkt in geschlossener Form durch bloße Wurzelausziehungen bestimmen. Damit ist also die vollständige Lösung des Problemes der Kongruenzklassengruppen in algebraischen Körpern zum ersten Male gefunden.

Über einige Summationsmethoden und ihre Anwendung auf die *Fourier*sche Reihe.

Von Herrn *T. H. Gronwall* in Princeton, N. J. (U. S. A.).

Einleitung.

Es sei

$$(1.) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

eine beliebige, konvergente oder divergente Reihe. Wenn wir

$$S_n^{(0)} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \;,\; s_n^{(0)} = S_n^{(0)},$$

$$S_n^{(1)} = S_0^{(0)} + S_1^{(0)} + \cdots + S_n^{(0)} \;,\; s_n^{(1)} = \frac{S_n^{(1)}}{n+1}.$$

$$(2.) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$S_n^{(r)} = S_0^{(r-1)} + S_1^{(r-1)} + \cdots + S_n^{(r-1)},\; s_n^{(r)} = \frac{S_n^{(r)}}{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+r)}{r!}}$$

setzen, so wird $s_n^{(r)}$ das n-te *Cesàro*sche Mittel r-ter Ordnung der vorgelegten Reihe genannt, und wenn

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(r)} = s$$

existiert, so heißt die Reihe summierbar r-ter Ordnung nach der *Cesàro*schen Methode mit der Summe s.

Jetzt sei $f(x)$ eine für $-\pi \leqq x \leqq \pi$ eindeutige und absolut integrierbare Funktion von x; außerhalb des Intervalles von $-\pi$ bis π möge diese Funktion durch die Forderung festgelegt sein, daß sie die Periode 2π besitze. Ferner sei

$$(3.) \qquad f(x) \backsim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

die *Fourier*sche Reihe dieser Funktion, wobei das Äquivalenzzeichen $\backsim$ nur besagt, daß die Koeffizienten nach den Formeln

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos nu\,du,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin nu\,du,\quad (n=0,1,2,\ldots)$$

gebildet sind; die Reihe selbst kann divergent sein.

In einer grundlegenden Abhandlung hat Herr *Fejér**) gezeigt, daß die *Fourier*sche Reihe einer absolut integrierbaren Funktion $f(x)$ summierbar erster Ordnung ist nach der *Cesàro*schen Methode mit der Summe

$$\lim_{h=0} \tfrac{1}{2}\left(f(x+h)+f(x-h)\right)$$

in jedem Punkte, wo dieser Grenzwert existiert; die Reihe ist sogar in jedem Intervalle, welches ganz innerhalb eines Stetigkeitsintervalles von $f(x)$ liegt, gleichmäßig summierbar erster Ordnung (mit der Summe $f(x)$).

Zur allgemeinen Reihe (1.) zurückkehrend, bilden wir den Ausdruck

$$(4.)\quad V_n = u_0 + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-\lambda+1)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+\lambda)}\,u_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{n!\,n!}{(n-\lambda)!\,(n+\lambda)!}\,u_\lambda.$$

Wenn

$$\lim_{n=\infty} V_n = s$$

existiert, so nennen wir die Reihe (1.) summierbar nach der *de la Vallée Poussin*schen Methode mit der Summe s.

Herr *de la Vallée Poussin***) hat nämlich diese Summationsmethode auf die *Fourier*sche Reihe (3.) angewandt und gezeigt, daß

$$V_n\{f(x)\} = \frac{a_0}{2} + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{n!\,n!}{(n-\lambda)!\,(n+\lambda)!}\,(a_\lambda\cos\lambda x + b_\lambda\sin\lambda x)$$

gesetzt,

$$\lim_{n=\infty} V_n\{f(x)\} = \lim_{h=0} \tfrac{1}{2}\left(f(x+h)+f(x-h)\right)$$

ist überall, wo der rechtsstehende Grenzwert existiert, und zwar gleichmäßig in jedem Intervall, welches innerhalb eines Stetigkeitsintervalles von $f(x)$ liegt. Sein Beweis beruht auf der Untersuchung des Ausdruckes

$$\frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\cos\frac{t-x}{2}\right)^{2n}dt}{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\frac{t-x}{2}\right)^{2n}dt}$$

---

*) *L. Fejér*, Untersuchungen über trigonometrische Reihen, Math. Ann. 58 (1904), S. 51—69.

**) *Ch. J. de la Vallée Poussin*, Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de *Fourier*, Bull. Ac. Sc. de Belgique 1908, S. 193—254.

welcher sich von $V_n\{f(x)\}$ nur durch einen numerischen, für $n=\infty$ dem Grenzwert Eins zustrebenden Faktor unterscheidet.

Zwecks Erzielung weiterer Resultate führt nun Herr *de la Vallée Poussin* den Begriff der verallgemeinerten Ableitung folgendermaßen ein: Wenn im Punkte x eine Gleichung der Form

$$(5.)\quad \tfrac{1}{2}(f(x+h)-f(x-h))=f^{(1)}(x)h+f^{(3)}(x)\frac{h^3}{3!}+\cdots+f^{(2n-1)}(x)\frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!}+(f^{(2n+1)}(x)+\omega(x,h))\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

besteht, wo $f^{(1)}(x), f^{(3)}(x), \ldots f^{(2n+1)}(x)$ von h unabhängig sind und $\lim_{h=0}\omega(x,h)=0$, so heißt $f^{(2n+1)}(x)$ die $2n+1$-te verallgemeinerte Ableitung von $f(x)$; ist ferner im Punkte x

$$(6.)\quad \tfrac{1}{2}(f(x+h)+f(x-h))=f^{(0)}(x)+f^{(2)}(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(2n-2)}(x)\frac{h^{2n-2}}{(2n-2)!}+(f^{(2n)}(x)+\omega(x,h))\frac{h^{2n}}{(2n)!},$$

wo $f^{(0)}(x)$, $f^{(2)}(x), \ldots$ von h unabhängig und $\lim_{h=0}\omega(x,h)=0$, so wird $f^{(2n)}(x)$ als die $2n$-te verallgemeinerte Ableitung von $f(x)$ bezeichnet. Es folgt also aus der Existenz von $f^{(r)}(x)$, daß die verallgemeinerten Ableitungen gleicher Parität $f^{(r-2)}(x)$, $f^{(r-4)}(x), \ldots$ gleichfalls im Punkte x vorhanden sind, und wenn die r-te Ableitung (im gewöhnlichen Sinne) im Punkte x existiert, so ist sie mit der r-ten verallgemeinerten Ableitung identisch*).

Herr *de la Vallée Poussin* zeigt nun**), daß die r-te Ableitung des trigonometrischen Polynoms $V_n\{f(x)\}$ für unbegrenzt wachsendes n gegen die r-te verallgemeinerte Ableitung von $f(x)$ konvergiert in jedem Punkte, wo diese existiert; die Konvergenz ist sogar gleichmäßig in jedem Intervall, wo die r-te verallgemeinerte Ableitung von $f(x)$ gleichmäßig existiert, d. h. wo das entsprechende $\omega(x,h)$ gleichmäßig mit h gegen Null konvergiert.

---

*) Die Wichtigkeit des Begriffes der verallgemeinerten Ableitung für die Theorie der *Fourier*schen Reihen erhellt schon daraus, daß die grundlegenden Resultate *Riemanns* (Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, Gesammelte Werke 2. Aufl. (Leipzig, Teubner 1892) S. 227—265) durch die Betrachtung der zweiten verallgemeinerten Ableitung jener Funktion gewonnen wurden, welche durch zweimalige gliedweise Integration aus der gegebenen trigonometrischen Reihe entsteht. Zu diesem Gegenstande vgl. auch zwei Arbeiten Herrn *de la Vallée Poussins* im Bull. Ac. Belgique 1912 und 1913.

**) a. a. O. Théorème IX, S. 242.

Es ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, die gegenseitigen Beziehungen der *Cesàro*schen und der *de la Vallée Poussin*schen Summationsmethoden festzustellen.

In § 1 wird gezeigt, daß eine Reihe (1.), welche summierbar r-ter Ordnung nach der *Cesàro*schen Methode ist mit der Summe s, auch nach dem *de la Vallée Poussin*schen Verfahren summierbar ist mit derselben Summe (Satz I). Dieser Satz läßt sich aber nicht umkehren; vielmehr wird an einem Beispiel gezeigt, daß es Reihen gibt, welche nach der *de la Vallée Poussin*schen Methode summierbar sind, ohne daß die *Cesàro*schen Mittel r-ter Ordnung konvergieren, wie groß auch r gewählt wird (Satz II).

In § 2 wird die *Fourier*sche Reihe in Betracht gezogen; es wird nachgewiesen, daß die r-te Ableitung des n-ten *Cesàro*schen Mittels $(r+1)$-ter Ordnung der *Fourier*schen Reihe einer absolut integrablen Funktion $f(x)$ für $n=\infty$ gegen die r-te verallgemeinerte Ableitung von $f(x)$ konvergiert in jedem Punkte, in welchem diese existiert; die Konvergenz ist wiederum eine gleichmäßige in jedem Intervalle, wo die r-te verallgemeinerte Ableitung von $f(x)$ gleichmäßig existiert (Satz III).

Aus den Sätzen I und III folgt offenbar das erwähnte Resultat des Herrn *de la Vallée Poussin*, während zufolge Satz II, der Satz III sich aus jenem Resultate nicht ableiten läßt.

§ 1. Allgemeine Sätze.

Satz I. *Es sei die Reihe*

$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

summierbar r-ter Ordnung nach der Cesàroschen Methode, d. h.

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(r)} = s.$$

Dann ist die Reihe auch nach der de la Vallée Poussinschen Methode summierbar mit derselben Summe, d. h.

$$\lim_{n=\infty} V_n = s.$$

Wir bemerken zunächst, daß es genügt, den Satz für den Fall $s=0$ zu beweisen. Betrachten wir nämlich die spezielle Reihe $s+0+0+0+\cdots+0+\cdots$, wo also $u_0=s$, $u_n=0$ für $n\geqq 1$, so ist offenbar $s_n^{(r)}=s$, $V_n=s$ $(n=0,1,2,\ldots)$, und wird diese Reihe gliedweise von der Reihe (1.) subtrahiert, so entsteht die Reihe $(u_0-s)+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$, deren *Cesàro*sche und

*de la Vallée Poussin*sche Mittel bzw. $\bar{s}_n^{(r)} = s_n^{(r)} - s$ und $\bar{V}_n = V_n - s$ sind. Die Aussage: „Aus $\lim_{n=0} \bar{s}_n^{(r)} = 0$ folgt $\lim_{n=0} \bar{V}_n = 0$“ ist demnach dem Satze I äquivalent. Nehmen wir also an, es sei

$$\lim_{n=0} s_n^{(r)} = 0, \tag{7.}$$

und schreiben wir zur Abkürzung

$$K(\lambda) = \frac{n!\,n!}{(n-\lambda)!\,(n+\lambda)!}, \quad (\lambda = 0, 1, \dots n), \tag{8.}$$
$$K(\lambda) = 0, \quad (\lambda > n),$$

so erhalten wir aus (4.) und (2.) durch partielle Summation

$$V_n = u_0 + \sum_{\lambda=1}^{n} K(\lambda) u_\lambda = S_0^{(0)} + \sum_{\lambda=1}^{n} K(\lambda)(S_\lambda^{(0)} - S_{\lambda-1}^{(0)})$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{n} (K(\lambda) - K(\lambda+1)) S_\lambda^{(0)} = -\sum_{\lambda=0}^{n} \Delta K(\lambda) \cdot S_\lambda^{(0)}.$$

Durch r-malige Wiederholung dieser partiellen Summation erhalten wir

$$V_n = \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^{r+1} \Delta^{r+1} K(\lambda) \cdot S_\lambda^{(r)} \tag{9.}$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^{r+1} s_\lambda^{(r)} \cdot \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+r)}{r!} \Delta^{r+1} K(\lambda),$$

wo Δ^{r+1} die $(r+1)$-te Differenz bezeichnet:

$$(-1)^{r+1} \Delta^{r+1} f(x) = \sum_{\alpha=0}^{r+1} (-1)^\alpha \binom{r+1}{\alpha} f(x+\alpha). \tag{10.}$$

Wir teilen jetzt die Summe (9.) in zwei durch $m = [\sqrt[3]{n}]$ getrennte Teile:

$$V_n = \sum_{\lambda=0}^{m} + \sum_{\lambda=m+1}^{n} = V_n' + V_n'', \tag{11.}$$

und betrachten zunächst V_n'. Zufolge (7.) existiert ein c_1 derart, daß $|s_\lambda^{(r)}| < c_1$ für $\lambda = 0, 1, 2, \dots$, und wir erhalten

$$|V_n'| < c_1 \sum_{\lambda=0}^{m} \frac{(\lambda+1)(\lambda+2\cdots(\lambda+r)}{r!} |\Delta^{r+1} K(\lambda)|. \tag{12.}$$

Um eine Abschätzung von $\Delta^{r+1} K(\lambda)$ zu gewinnen, bemerken wir, daß

$$K(\lambda) = \frac{n!\,n!}{(2n)!} \frac{(2n)!}{(n-\lambda)!\,(n+\lambda)!},$$

wo der zweite Faktor den Koeffizienten von $x^{n-\lambda}$ in der Binomialentwicklung von $(1+x)^{2n}$ darstellt, so daß nach dem *Cauchy*schen Satz

$$\frac{(2n)!}{(n-\lambda)!\,(n+\lambda)!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} (1+x)^{2n} \frac{dx}{x^{n-\lambda+1}}, \quad \text{oder}$$
$$K(\lambda) = \frac{2^{2n} n!\,n!}{(2n)!} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=1} \left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)^{2n} x^{\lambda-1}\, dx.$$

Die bekannte Formel $\Delta^r x^\lambda = x^\lambda (x-1)^r$ liefert nun

$$(13.)\quad (-1)^{r+1}\Delta^{r+1}K(\lambda) = \frac{2^{2n}n!\,n!}{(2n)!}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|x|=1}\Big(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\Big)^{2n}x^{\lambda-1}(1-x)^{r+1}\,dx.$$

Wird hier $x=e^{2\theta i}$ gesetzt $(0\leqq\theta\leqq\pi)$, so erhalten wir

$$(14.)\quad \Delta^{r+1}K(\lambda) = \frac{2^{2n}n!\,n!}{(2n)!}\cdot\frac{(2i)^{r+1}}{\pi}\int_0^\pi(\cos\theta)^{2n}(\sin\theta)^{r+1}e^{(r+1+2\lambda)\theta i}\,d\theta.$$

Aus der Ungleichung*)

$$(15.)\qquad \sqrt{2n} < \frac{2^{2n}n!\,n!}{(2n)!} \leqq 2\sqrt{n},\qquad (n=1,2,\ldots)$$

schließen wir jetzt, daß

$$|\Delta^{r+1}K(\lambda)| < \frac{2^{r+2}\sqrt{n}}{\pi}\int_0^\pi(\cos\theta)^{2n}(\sin\theta)^{r+1}d\theta$$
$$= \frac{2^{r+3}\sqrt{n}}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2n}(\sin\theta)^{r+1}d\theta,$$

oder nach Auswertung des rechts auftretenden *Euler*schen Integrals erster Gattung

$$|\Delta^{r+1}K(\lambda)| < \frac{2^{r+2}\sqrt{n}}{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}r+1)\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2}r+\frac{3}{2})}.$$

Es ist aber**)

---

*) Dies folgt sofort aus der *Stirling*schen Formel, läßt sich aber auch folgendermaßen ganz elementar beweisen: Setzen wir $\varphi(n)=\frac{2^{2n}n!\,n!}{(2n)!\sqrt{n}}$, so folgt $\frac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)}=\sqrt{1-\frac{1}{(2n-1)^2}}$, woraus

$$\frac{2^{2n}n!\,n!}{(2n)!} = 2\sqrt{n}\sqrt{\prod_{\alpha=2}^{n}\Big(1-\frac{1}{(2\alpha-1)^2}\Big)},$$

und es ist

$$1>\prod_{\alpha=2}^{n}\Big(1-\frac{1}{(2\alpha-1)^2}\Big)>1-\sum_{\alpha=2}^{n}\frac{1}{(2\alpha-1)^2}>1-\sum_{\alpha=2}^{n}\frac{1}{(2\alpha-3)(2\alpha-1)}=1-\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2(2n-1)}>\tfrac{1}{2}.$$

**) Dies folgt ebenfalls aus der *Stirling*schen Formel; ein elementarer Beweis ist der folgende: Wegen $\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\beta)}=\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)}:\frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n)}$ genügt es, (16.) für $\beta=0$ zu beweisen. Aus $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ erhalten wir

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)} = \Gamma(\alpha)\prod_{\lambda=1}^{n-1}\Big(1+\frac{\alpha}{\lambda}\Big);$$

die *Taylor*sche Formel ergibt

$$\log(1+\alpha x)-\alpha\log(1+x) = \frac{x^2}{2}\Big(\frac{\alpha}{(1+\theta x)^2}-\frac{\alpha^2}{(1+\alpha\theta x)^2}\Big),\quad 0<\theta<1,$$

so daß für $x=1/\lambda$

(16.) $$c_2 n^{\alpha-\beta} < \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\beta)} < c_3 n^{\alpha-\beta},\ (n+\alpha \geqq 0,\ n+\beta \geqq 0,\ n=1,2,\ldots),$$

und folglich

$$|\Delta^{r+1} K(\lambda)| < \frac{c_6}{n^{\frac{1}{2}(r+1)}}.$$

Dies in (12.) eingetragen, ergibt

$$|V_n'| < \frac{c_1 c_6}{n^{\frac{1}{2}(r+1)}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{m} \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+r)}{r!} = \frac{c_1 c_6}{n^{\frac{1}{2}(r+1)}} \frac{(m+1)(m+2)\cdots(m+r+1)}{(r+1)!}$$

$$< \frac{c_1 c_6}{n^{\frac{1}{2}(r+1)}} \cdot (r+2) m^{r+1} < \frac{c_1 c_6}{n^{\frac{1}{2}(r+1)}} \cdot (r+2) n^{\frac{1}{2}(r+1)},$$

oder

(17.) $$|V_n'| < \frac{c_7}{n^{\frac{1}{2}(r+1)}}.$$

Wir gehen jetzt zur Betrachtung von V_n'' über. Aus (8.) und (10.) folgt

$$(-1)^{r+1} \Delta^{r+1} K(\lambda) = \frac{n!\,n!}{(n-\lambda)!\,(n+\lambda+r+1)!} \sum_{\alpha=0}^{r+1} (-1)^{\alpha} \binom{r+1}{\alpha} (n-\lambda)\cdots(n-\lambda$$
$$-\alpha+1)\cdot(n+\lambda+\alpha+1)\cdots(n+\lambda+r+1),$$

und weil die Summe ein Polynom $(r+1)$-ten Grades in λ ist, so hat die Gleichung $\Delta^{r+1} K(\lambda) = 0$ höchstens $r+1$ Wurzeln zwischen m und n, welche wir mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ bezeichnen ($p \leqq r+1$); schreiben wir noch $\lambda_0 = m$ und $_{p+1} = n$, so wird

$$V_n'' = \sum_{a=0}^{p} \sum_{\lambda=[\lambda_a]+1}^{[\lambda_{a+1}]} (-1)^{r+1} s_\lambda^{(r)} \cdot \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+r)}{r!} \Delta^{r+1} K(\lambda).$$

Setzen wir $\varepsilon_n = \text{max.} |s_\lambda^{(r)}|$ für $m < \lambda \leqq n$, so ist zufolge (7.) $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, und da im Intervalle $[\lambda_a]+1 \leqq \lambda \leqq [\lambda_{a+1}]$ der Ausdruck $\Delta^{r+1} K(\lambda)$ ein unveränderliches Vorzeichen hat, so wird

(18.) $$|V_n''| \leqq \varepsilon_n \sum_{a=0}^{p} \left| \sum_{\lambda=[\lambda_a]+1}^{[\lambda_{a+1}]} \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+r)}{r!} \Delta^{r+1} K(\lambda) \right|.$$

$$\left| \log\left(1+\frac{\alpha}{\lambda}\right) - \alpha \log\left(1+\frac{1}{\lambda}\right) \right| < \frac{c_4}{\lambda^2},$$

und indem wir in bezug auf λ von 1 bis $n-1$ summieren,

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{n-1} \log\left(1+\frac{\alpha}{\lambda}\right) - \alpha \sum_{\lambda=1}^{n-1} \log\left(1+\frac{1}{\lambda}\right) \right| < c_4 \sum_{\lambda=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda^2} < c_4 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2}$$

oder

$$\left| \log \prod_{\lambda=1}^{n-1} \left(1+\frac{\alpha}{\lambda}\right) - \alpha \log n \right| < c_5,$$

und diese Abschätzung in den Ausdruck für $\Gamma(n+\alpha)/\Gamma(n)$ eingetragen, ergibt (16.).

Nun gilt aber die folgende, leicht zu beweisende Formel für partielle Summation:

$$(19.)\quad \sum_{\lambda=M}^{N}\varphi(\lambda)\,\Delta^r\psi(\lambda)=\sum_{\varrho=0}^{r-1}(-1)^{r-1-\varrho}\big(\Delta^{r-1-\varrho}\varphi(N)\,\Delta^\varrho\psi(N+\varrho)$$
$$-\Delta^{r-1-\varrho}\varphi(M)\,\Delta^\varrho\psi(M+\varrho)\big)+(-1)^r\sum_{\lambda=M}^{N}\psi(\lambda+r)\,\Delta^r\varphi(\lambda);$$

indem wir r mit $r+1$ vertauschen und $\varphi(\lambda)=\frac{(\lambda+1)(\lambda+)\cdots(\lambda+r)}{r!}$, $\psi(\lambda)=K(\lambda)$ setzen, so daß

$$\Delta^{r-\varrho}\varphi(\lambda)=\frac{(\lambda+r+1-\varrho)\cdots(\lambda+r)}{\varrho!},\ (\varrho=1,2,\dots r),\ \Delta^r\varphi(\lambda)=1,\ \Delta^{r+1}\varphi(\lambda)=0,$$

erhalten wir aus (19.)

$$(20.)\quad \sum_{\lambda=M}^{N}\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+r)}{r!}\Delta^{r+1}K(\lambda)$$
$$=\Big[\sum_{\varrho=0}^{r}(-1)^{r-\varrho}\frac{(\lambda+r+1-\varrho)\cdots(\lambda+r)}{\varrho!}\Delta^\varrho K(\lambda+\varrho)\Big]_{\lambda=M}^{\lambda=N}.$$

Aus (14.) folgt aber

$$(21.)\quad \frac{(\lambda+r+1-\varrho)\cdots(\lambda+r)}{r!}\Delta^\varrho K(\lambda+\varrho)=\frac{2^{2n}n!\,n!\,(2i)^\varrho(\lambda+r+1-\varrho)\cdots(\lambda+r)}{(2n)!\qquad\pi\qquad\varrho!}$$
$$\cdot\int_0^\pi(\cos\theta)^{2n}(\sin\theta)^\varrho e^{(3\varrho+2\lambda)\theta i}d\theta.$$

Durch vollständige Induktion erhalten wir leicht die Formel

$$(22.)\quad \frac{d^\beta}{d\theta^\beta}\big((\cos\theta)^{2n}(\sin\theta)^\varrho\big)=\sum_{\alpha=0}^{\beta}A_{\beta\alpha}(\cos\theta)^{2n+\beta-2\alpha}(\sin\theta)^{\varrho-\beta+2\alpha},$$

wo

$$A_{\beta+1,0}=(\varrho-\beta)A_{\beta,0},$$
$$A_{\beta+1,\alpha}=(\varrho-\beta+2\alpha)A_{\beta\alpha}-(2n+\beta+2-2\alpha)A_{\beta,\alpha-1},\ (\alpha=1,2,\dots\beta),$$
$$A_{\beta+1,\beta+1}=-(2n-\beta)A_{\beta\beta}.$$

Aus diesen Rekursionsformeln folgt insbesondere, daß $A_{\beta\alpha}$ ein Polynom in n ist vom Grade α und mit nur von ϱ, α und β abhängigen numerischen Koeffizienten, so daß für $\varrho\leqq r$, $\beta\leqq r$ und $n\geqq 1$

$$(23.)\quad |A_{\beta\alpha}|<c_8 n^\alpha.$$

In der bekannten Formel für teilweise Integration

$$\int u\frac{d^\varrho v}{d\theta^\varrho}d\theta=\sum_{\beta=0}^{\varrho-1}(-1)^\beta\frac{d^\beta u}{d\theta^\beta}\frac{d^{\varrho-1-\beta}v}{d\theta^{\varrho-1-\beta}}d\theta+(-1)^\varrho\int v\frac{d^\varrho u}{d\theta^\varrho}d\theta$$

schreiben wir jetzt $u=(\cos\theta)^{2n}(\sin\theta)^\varrho$ und $v=\frac{e^{(3\varrho+2\lambda)\theta i}}{i^\varrho(3\varrho+2\lambda)^\varrho}$ und erhalten, da der integrierte Teil wegen (22.) den Faktor $\sin\theta$ enthält und infolgedessen an den Grenzen 0 und π verschwindet,

$$\frac{(2i)^\varrho}{\pi}\frac{(\lambda+r+1-\varrho)\cdots(\lambda+r)}{r!}\int_0^\pi(\cos\theta)^{2n}(\sin\theta)^\varrho e^{(3\varrho+2\lambda)\theta i}d\theta$$

(24.)
$$=\frac{2^\varrho}{\pi}\frac{(\lambda+r+1-\varrho)\cdots(\lambda+r)}{\varrho!\,(3\varrho+2\lambda)^\varrho}\sum_{\alpha=0}^{\varrho}A_{\varrho\alpha}\int_0^\pi(\cos\theta)^{2n+\varrho-2\alpha}(\sin\theta)^{2\alpha}e^{(3\varrho+2\lambda)\theta i}d\theta.$$

Nun ist aber

$$\left|\int_0^\pi(\cos\theta)^{2n+\varrho-2\alpha}(\sin\theta)^{2\alpha}e^{(3\varrho+2\lambda)\theta i}d\theta\right|\leq\int_0^\pi|\cos\theta|^{2n+\varrho-2\alpha}(\sin\theta)^{2\alpha}d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2n+\varrho-2\alpha}(\sin\theta)^{2\alpha}d\theta=\frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(n-\alpha+\frac{1}{2}(\varrho+1))}{\Gamma(n+\frac{1}{2}\varrho+1)}<\frac{c_9}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

zufolge (16.), und da

$$\frac{2^\varrho}{\pi}\frac{(\lambda+r+1-\varrho)\cdots(\lambda+r)}{\varrho!\,(3\varrho+2\lambda)^\varrho}<1,$$

so folgt aus (23.) und (24.)

$$\left|\frac{(2i)^\varrho}{\pi}\frac{(\lambda+r+1-\varrho)\cdots(\lambda+r)}{r!}\int_0^\pi(\cos\theta)^{2n}(\sin\theta)^\varrho e^{(3\varrho+2\lambda)\theta i}d\theta\right|<\sum_{\alpha=0}^{\varrho}\frac{c_8\,c_9\,n^\alpha}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}=\frac{(\varrho+1)\,c_8\,c_9}{\sqrt{n}}.$$

Wegen (15.) sehen wir jetzt, daß die linke Seite von (21.) für alle Werte von λ und n beschränkt ist, und dasselbe gilt dann offenbar für die linke Seite von (20.). Setzen wir $M=[\lambda_a]+1$, $N=[\lambda_{a+1}]$, so folgt endlich aus (18.), daß

$$|V_n''|<c_{10}\,\varepsilon_n,$$

und es ergibt sich aus (11.) und (17.)

$$|V_n|<\frac{c_7}{n^{\frac{1}{6}(r+1)}}+c_{10}\,\varepsilon_n,$$

was wegen $\lim_{n=\infty}\varepsilon_n=0$ den Beweis vollendet.

Aus dem vorangehenden Beweise folgt auch leicht der

Zusatz zu I. *Sind die u_n Funktionen einer reellen oder komplexen Veränderlichen x, und ist die Reihe* (1.) *in einem Gebiete T gleichmäßig summierbar r-ter Ordnung nach der Cesàroschen Methode, so ist sie auch in T gleichmäßig summierbar nach der de la Vallée Poussinschen Methode mit derselben Summe.*

Wir wollen jetzt nachweisen, daß der Satz I nicht umkehrbar ist:

Satz II. *Es gibt Reihen, welche nach der de la Vallée Poussinschen Methode summierbar sind, ohne daß die Cesàroschen Mittel irgendeiner endlichen Ordnung r konvergieren.*

Betrachten wir nämlich die geometrische Reihe

(25.)
$$\frac{1}{1-x}\backsim 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,$$

wo also $u_n=x^n$. Zufolge (2.) wird

$$s_n^{(1)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{n+1}\frac{x-x^{n+2}}{(1-x)^2},$$

so daß für $|x| \leqq 1$ und $|1-x| \geqq \varepsilon$, wo ε positiv aber beliebig klein, gleichmäßige *Cesàro*sche Summierbarkeit erster Ordnung stattfindet mit der Summe $\frac{1}{1-x}$. Für $x=1$ ist (25.) als eigentlich divergente Reihe nicht summierbar, wie hoch auch die Ordnung r gewählt wird, und dasselbe gilt für $|x|>1$, weil dann die notwendige Bedingung der Summierbarkeit r-ter Ordnung

$$\lim_{n=\infty} \frac{|u_n|}{n^r} = 0$$

nicht erfüllt ist*).

Schreiben wir jetzt

$$(26.) \qquad V_n(x) = \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{n!\,n!}{(n-\lambda)!\,(n+\lambda)!} x^\lambda,$$

so liefert die Anwendung von Satz I mit $r=1$, daß

$$(27.) \qquad \lim_{n=\infty} V_n(x) = \frac{1}{1-x}$$

gleichmäßig für $|x| \leqq 1$, $|1-x| \geqq \varepsilon$. Es ist aber von einigem Interesse, dieses Resultat auch direkt und elementar zu beweisen. Aus (26.) erhalten wir durch partielle Summation

$$V_n(x) = -\sum_{\lambda=0}^{n} \Delta K(\lambda)\,\frac{1-x^{\lambda+1}}{1-x} = -\frac{1}{1-x}\sum_{\lambda=0}^{n}\Delta K(\lambda) + \frac{x}{1-x}\sum_{\lambda=0}^{n} x^\lambda \Delta K(\lambda),$$

und indem wir die erste Summe direkt zu $K(n+1)-K(0)$ ausrechnen, die zweite aber nochmals durch partielle Summation umformen,

$$V_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2}\sum_{\lambda=0}^{n}(1-x^{\lambda+1})\Delta^2 K(\lambda),$$

so daß für $|x| \leqq 1$, $|1-x| \geqq \varepsilon$

$$\left| V_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| < \frac{2}{\varepsilon^2}\sum_{\lambda=0}^{n} |\Delta^2 K(\lambda)|.$$

Durch direkte Ausrechnung überzeugt man sich leicht, daß $\Delta^2 K(\lambda)$ nur an einer einzigen Stelle λ_1 zwischen 0 und n das Vorzeichen wechselt, und zwar ist für $n \geqq 9$

$$\sqrt{n} > \lambda_1 > \tfrac{1}{2}\sqrt{n}.$$

Es ist also

$$\Sigma|\Delta^2 K(\lambda)| = -\sum_{\lambda=0}^{[\lambda_1]}\Delta^2 K(\lambda) + \sum_{\lambda=[\lambda_1]+1}^{n}\Delta^2 K(\lambda) = \Delta K(0) - 2\Delta K([\lambda_1]+1) + \Delta K(n+1).$$

*) Vgl. z. B. *Bromwich*, An Introduction to the Theory of Infinite Series, London 1908, S. 318.

Nun ist $\Delta K(n+1) = -K(n) < 0$, ferner für $0 \leqq \lambda \leqq n$

$$\Delta K(\lambda) = -\frac{n!\,n!}{(n-\lambda)!\,(n+\lambda)!}\,\frac{2\lambda+1}{n+\lambda+1} < 0, \quad |\Delta K(\lambda)| < \frac{2\lambda+1}{n+\lambda+1},$$

so daß

$$\Sigma|\Delta^2 K(\lambda)| < 2 \cdot \frac{2([\lambda_1]+1)+1}{n+[\lambda_1]+2} < \frac{10}{\sqrt{n}} \text{ für } n \geqq 9,$$

$$\left| V_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| < \frac{20}{\varepsilon^2}\,\frac{1}{\sqrt{n}},$$

womit (27.) wiederum bewiesen ist.

Für $x=1$ ist $\lim_{n=\infty} V_n(1) = +\infty$, denn es ist für $n \geqq N$, wo N beliebig groß,

$$V_n(1) = \sum_{\lambda=0}^{n} K(\lambda) > \sum_{\lambda=0}^{N-1} K(\lambda),$$

und weil bei festem λ $\lim_{n=\infty} K(\lambda) = 1$, so wird $\liminf_{n=\infty} V_n(1) \geqq N$.

Um endlich das Verhalten von $V_n(x)$ für $|x| > 1$ zu erschließen, bilden wir den Ausdruck

$$V_n(x) + V_n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{n!\,n!}{(2n)!} \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{(2n)!}{(n-\lambda)!\,(n+\lambda)!}\left(x^\lambda + \frac{1}{x^\lambda}\right)$$

$$= \frac{n!\,n!}{(2n)!}\,\frac{1}{x^n} \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{(2n)!}{\alpha!\,(2n-\alpha)!}\,(x^\alpha + x^{2n-\alpha}).$$

Nach dem Binomialsatz ist die Summe rechts gleich $(1+x)^{2n} + \frac{(2n)!}{n!\,n!}\,x^n$, und wir erhalten

$$(28.) \qquad V_n(x) = 1 - V_n\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2^{2n}\,n!\,n!}{(2n)!}\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)^{2n}.$$

Zufolge (27.) ist nun gleichmäßig für $|x| \geqq 1$, $|1-x| \geqq \varepsilon$

$$\lim_{n=\infty}\left(1 - V_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-x},$$

und (28.) ergibt unter Anwendung von (15.)

$$\lim_{n=\infty}\left| V_n(x) - \frac{1}{1-x}\right| = 0 \text{ gleichmäßig für } |x| \geqq 1,\ |1-x| \geqq \varepsilon,\ \left|\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right| \leqq 1-\varepsilon,$$

$$= +\infty \text{ für } |x| \geqq 1,\ |1-x| \geqq \varepsilon,\ \left|\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right| \geqq 1.$$

In der umstehenden Figur ist die Kurve $\left|\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right| = 1$ dargestellt; sie besteht aus zwei Zügen, von welchen der punktiert gezeichnete (welcher für uns nicht in Betracht kommt) aus dem voll gezeichneten durch Inversion in bezug auf den Einheitskreis entsteht.

Fassen wir die vorangehende Diskussion zusammen, so ergibt sich, daß

$$\lim_{n=\infty} V_n(x) = \frac{1}{1-x}$$

gleichmäßig in jedem Bereich, welcher im Inneren des voll gezeichneten Kurvenzuges liegt, während auf und außerhalb dieser Kurve Divergenz stattfindet. Wie vorhin gezeigt wurde, divergieren die *Cesàro*schen Mittel irgendwelcher Ordnung r in dem Bereich zwischen dem Einheitskreis und dem vollen Kurvenzuge, und der Satz II ist bewiesen.

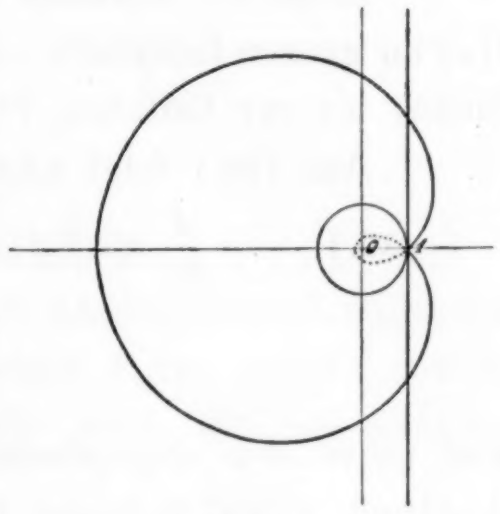

Fig. 1.

Ziehen wir für einen Augenblick auch die *Borel*sche Summationsmethode in Betracht; bekanntlich konvergiert dieselbe für die Reihe (25.) in jedem Punkte, welcher links von der Tangente am Einheitskreis in $x=1$ liegt. Ein Blick auf die Figur zeigt, daß im Falle der Reihe (25.) ein jeder der *de la Vallée Poussin*schen und *Borel*schen Konvergenzbereiche Punkte enthält, welche außerhalb des anderen liegen.

§ 2. Die *Fourier*sche Reihe.

Betrachten wir zunächst die divergente Reihe

$$\tfrac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \cdots + \cos nu + \cdots,$$

wo also $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_n = \cos nu$ $(n \geqq 1)$, und bezeichnen wir mit

$$S_n^{(r)}(u),\ s_n^{(r)}(u)$$

die zu dieser Reihe gehörigen Ausdrücke (2.). Es sei ferner $s_n^{(r)}\{f(x)\}$ das zur *Fourier*schen Reihe (3.) gehörige n-te *Cesàro*sche Mittel r-ter Ordnung; dann ist, wie aus den Integralausdrücken der *Fourier*koeffizienten sofort hervorgeht,

$$(29.) \qquad s_n^{(r)}\{f(x)\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, s_n^{(r)}(x-t)\, dt.$$

Es gilt jetzt der

Satz III. *Wenn die im Intervalle* $-\pi \leqq x \leqq \pi$ *eindeutige und absolut integrierbare Funktion* $f(x)$ *in einem Punkte* x *dieses Intervalles eine verallgemeinerte Ableitung* r*-ter Ordnung* $f^{(r)}(x)$ *besitzt, so konvergieren in diesem Punkte die* r*-ten Ableitungen der Cesàroschen Mittel* $(r+1)$*-ter Ordnung der zu* $f(x)$ *gehörigen Fourierschen Reihe gegen* $f^{(r)}(x)$:

$$\lim_{n=\infty} \frac{d^r}{dx^r} s_n^{(r+1)}\{f(x)\} = f^{(r)}(x),$$

und zwar ist die Konvergenz eine gleichmäßige in jedem Intervalle, in welchem jene verallgemeinerte Ableitung $f^{(r)}(x)$ gleichmäßig existiert.

Zunächst beweisen wir den Satz in dem ganz speziellen Falle, wo $f(x)$ im ganzen Intervalle $-\pi \leqq x \leqq \pi$ stetige Ableitungen (im gewöhnlichen Sinne) bis zur Ordnung r besitzt, welche sämtlich die Periode 2π haben.

Aus (29.) folgt nämlich

$$(30.) \qquad \frac{d^r}{dx^r} s_n^{(r+1)}\{f(x)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\partial^r}{\partial x^r} s_n^{(r+1)}(x-t)\, dt$$

$$= \frac{(-1)^r}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\partial^r}{\partial t^r} s_n^{(r+1)}(x-t)\, dt,$$

und unter den angegebenen Voraussetzungen können wir in dem letzten Ausdruck r-mal teilweise integrieren und bekommen das Resultat

$$\frac{(-1)^r}{\pi}\Big[f(t)\frac{\partial^{r-1}}{\partial t^{r-1}} s_n^{(r+1)}(x-t) - f'(t)\frac{\partial^{r-2}}{\partial t^{r-2}} s_n^{(r+1)}(x-t) + \cdots$$

$$+ (-1)^{r-1} f^{(r-1)}(t)\, s_n^{(r+1)}(x-t)\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{(-1)^{2r}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t)\, s_n^{(r+1)}(x-t)\, dt,$$

so daß wegen der Periodizität des integrierten Teils

$$\frac{d^r}{dx^r} s_n^{(r+1)}\{f(x)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(t)\, s_n^{(r+1)}(x-t)\, dt,$$

oder zufolge (29.)

$$(31.) \qquad \frac{d^r}{dx^r} s_n^{(r+1)}\{f(x)\} = s_n^{(r+1)}\{f^{(r)}(x)\}.$$

Nun ist aber nach dem in der Einleitung erwähnten Resultate des Herrn *Fejér*

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(1)}\{f^{(r)}(x)\} = f^{(r)}(x),$$

und da die *Cesàro*schen Mittel zweiter, ..., $(r+1)$-ter Ordnung offenbar denselben Grenzwert haben wie diejenigen erster Ordnung, so ist unsere Behauptung bewiesen.

Um aber den Satz III in seiner vollen Allgemeinheit zu beweisen, ist es notwendig, die Ausdrücke $S_n^{(r+1)}(u)$ und $s_n^{(r+1)}(u)$ eingehender zu untersuchen.

Bekanntlich ist für $-1 < z < 1$

$$\tfrac{1}{2} + z\cos u + z^2 \cos 2u + \cdots + z^n \cos nu + \cdots = \Re\Big(\frac{1}{1-ze^{ui}} - \frac{1}{2}\Big),$$

wo $\Re$ den reellen Teil des dahinterstehenden Ausdruckes bedeutet, und

nach *Cauchy*scher Multiplikation mit der Reihenentwicklung von $\frac{1}{(1-z)^{r+2}}$ folgt hieraus*)

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(r+1)}(u)\, z^n = \Re \frac{1}{(1-z)^{r+2}}\left(\frac{1}{1-ze^{ui}} - \frac{1}{2}\right),$$

oder, indem wir z durch $1/z$ ersetzen,

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(r+1)}(u)\, z^{-n} = \Re \frac{z^{r+2}}{(z-1)^{r+2}}\left(\frac{z}{z-e^{ui}} - \frac{1}{2}\right),$$

woraus, für $r \geqq 1$,

$$\text{(32.)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^r S_n^{(r+1)}(u)}{du^r}\, z^{-n} = \Re \frac{z^{r+3}}{(z-1)^{r+2}} \frac{\partial^r}{\partial u^r} \frac{1}{z-e^{ui}}.$$

Es handelt sich jetzt darum, den rechtsstehenden Ausdruck nach fallenden Potenzen von z zu entwickeln, und zwar in einer Form, welche sowohl die Vorzeichenbestimmung der Koeffizienten als auch die Abschätzung ihrer Größenordnung gestattet.

Zunächst ist leicht einzusehen, daß

$$\text{(33.)} \qquad \frac{\partial^r}{\partial u^r} \frac{1}{z-e^{ui}} = r!\, i^r \sum_{\varkappa=1}^{r} C_{\varkappa r} \frac{e^{\varkappa ui}}{(z-e^{ui})^{\varkappa+1}}$$

wo die reellen und positiven Konstanten $C_{\varkappa r}$ den Rekursionsformeln

$$C_{1,r} = \frac{1}{r!},\ C_{r,r} = 1,\ C_{\varkappa,r+1} = \frac{\varkappa}{r+1}(C_{\varkappa,r} + C_{\varkappa-1,r}), \quad (1 < \varkappa < r),$$

genügen. Ferner ist

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{z-a} - \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{z-b},$$

und indem wir diese Identität α-mal nach a und β-mal nach b differenzieren, so erhalten wir, indem wir in jedem der zwei Glieder rechts die *Leibniz*sche Formel benutzen:

$$\frac{\alpha!\,\beta!}{(z-a)^{\alpha+1}(z-b)^{\beta+1}} = \frac{(-1)^{\alpha}(\alpha+\beta)!}{(a-b)^{\alpha+\beta+1}}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$$
$$+ \sum_{\lambda=1}^{\alpha} \binom{\alpha}{\lambda} \frac{(-1)^{\alpha-\lambda}(\alpha+\beta-\lambda)!}{(a-b)^{\alpha+\beta+1-\lambda}} \frac{\lambda!}{(z-a)^{\lambda+1}} + (-1)^{\alpha+1} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\beta} \binom{\beta}{\lambda} \frac{(\alpha+\beta-\lambda)!}{(a-b)^{\alpha+\beta+1-\lambda}} \frac{\lambda!}{(z-b)^{\lambda+1}}.$$

Nach Multiplikation mit z^{γ} und Entwickelung des Ausdruckes rechts nach fallenden Potenzen von z erhalten wir

$$\frac{\alpha!\,\beta!\,z^{\gamma}}{(z-a)^{\alpha+1}(z-b)^{\beta+1}} = \frac{1}{(a-b)^{\alpha+\beta+1}}\left\{(-1)^{\alpha}(\alpha+\beta)! \sum_{n=1-\gamma}^{\infty} \frac{a^{n+\gamma-1} - b^{n+\gamma-1}}{z^n}\right.$$
$$+ \sum_{\lambda=1}^{\alpha} \sum_{n=\lambda+1-\gamma}^{\infty} (-1)^{\alpha-\lambda} \binom{\alpha}{\lambda} (\alpha+\beta-\lambda)!\,(a-b)^{\lambda}(n+\gamma-\lambda)\cdots(n+\gamma-1)\, \frac{a^{n+\gamma-\lambda-1}}{z^n}$$
$$\left. + \sum_{\lambda=1}^{\beta} \sum_{n=\lambda+1-\gamma}^{\infty} (-1)^{\alpha+1} \binom{\beta}{\lambda} (\alpha+\beta-\lambda)!\,(a-b)^{\lambda}(n+\gamma-\lambda)\cdots(n+\gamma-1)\, \frac{b^{n+\gamma-\lambda-1}}{z^n}\right\}.$$

*) Siehe z. B. *Bromwich*, a. a. O., S. 311.

Hierin setzen wir jetzt

$$a = e^{ui},\ b = 1,\ \alpha = \varkappa,\ \beta = r+1,\ \gamma = r+3$$

und finden für den Koeffizienten von z^{-n} in

$$\frac{\varkappa!\,(r+1)!\,z^{r+3}}{(z-e^{ui})^{\varkappa+1}(z-1)^{r+2}},$$

wobei $n \geqq r+2$ angenommen wird, den Ausdruck

$$\frac{(e^{ui}-1)^{r-\varkappa}}{(e^{ui}-1)^{2r+2}}\Big\{(-1)^{\varkappa}(\varkappa+r+1)!\,(e^{(n+r+2)ui}-1)$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{\varkappa}(-1)^{\varkappa-\lambda}\binom{\varkappa}{\lambda}(\varkappa+r+1-\lambda)!\,(e^{ui}-1)^{\lambda}(n+r+3-\lambda)\cdots(n+r+2)\,e^{(n+r+2-\lambda)ui}$$

$$+(-1)^{\varkappa+1}\sum_{\lambda=1}^{r+1}\binom{r+1}{\lambda}(\varkappa+r+1-\lambda)!\,(e^{ui}-1)^{\lambda}(n+r+3-\lambda)\cdots(n+r+2)\Big\}.$$

Unter Bezugnahme auf (32.) und (33.) erhalten wir nunmehr

$$\frac{d^r S_n^{(r+1)}(u)}{du^r} = \frac{1}{r+1}\,\Re\sum_{\varkappa=1}^{r} C_{\varkappa r}\,e^{\varkappa ui}\,\frac{i^r}{\varkappa!}\,\frac{(e^{ui}-1)^{r-\varkappa}}{(e^{ui}-1)^{2r+2}}\cdot(-1)^{\varkappa}\Big\{(\varkappa+r+1)!\,(e^{(n+r+2)ui}-1)$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{\varkappa}(-1)^{\lambda}\binom{\varkappa}{\lambda}(\varkappa+r+1-\lambda)!\,(e^{ui}-1)^{\lambda}(n+r+3-\lambda)\cdots(n+r+2)\,e^{(n+r+2-\lambda)ui} \tag{34.}$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{r+1}\binom{r+1}{\lambda}(\varkappa+r+1-\lambda)!\,(e^{ui}-1)^{\lambda}(n+r+3-\lambda)\cdots(n+r+2)\Big\}.$$

In dem rechtsstehenden Ausdruck ist aber die Summe derjenigen Glieder, für welche $\lambda = r+1$ ist, gleich Null. Denn jene Glieder sind

$$-\frac{1}{r+1}\,\Re\sum_{\varkappa=1}^{r} C_{\varkappa r}\,\frac{i^r(-1)^{\varkappa}\,e^{\varkappa ui}}{(e^{ui}-1)^{\varkappa+1}}\cdot(n+2)\cdots(n+r+2)$$

$$=\frac{(n+2)\cdots(n+r+2)}{(r+1)!}\,\Re\sum_{\varkappa=1}^{r} r!\,i^r C_{\varkappa r}\,\frac{e^{\varkappa ui}}{(1-e^{ui})^{\varkappa+1}}=\frac{(n+2)\cdots(n+r+2)}{(r+1)!}\,\Re\,\frac{d^r}{du^r}\,\frac{1}{1-e^{ui}}$$

zufolge (33.), und wegen

$$\frac{1}{1-e^{ui}} = \tfrac{1}{2}\,(1 + i\cot\tfrac{1}{2}\,u)$$

ist

$$\Re\,\frac{d^r}{du^r}\,\frac{1}{1-e^{ui}} = 0, \qquad (r \geqq 1).$$

Infolgedessen erhalten wir aus (34.) für $n \geqq r+2$

$$(r+1)\Big(2\sin\frac{u}{2}\Big)^{2r+2}\frac{d^r S_n^{(r+1)}(u)}{du^r}$$

$$=-\,\Re\sum_{\varkappa=1}^{r}\frac{C_{\varkappa r}\,i^{\varkappa}}{\varkappa!}\Big(2\sin\frac{u}{2}\Big)^{r-\varkappa}e^{\frac{\varkappa-r-2}{2}ui}\Big\{(\varkappa+r+1)!\,(e^{(n+r+2)ui}-1)$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{\varkappa}(-1)^{\lambda}\binom{\varkappa}{\lambda}(\varkappa+r+1-\lambda)!\,i^{\lambda}\Big(2\sin\frac{u}{2}\Big)^{\lambda}(n+r+3-\lambda)\cdots(n+r+2)\,e^{\left(n+r+2+\frac{\lambda}{2}\right)ui} \tag{35.}$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{r}\binom{r+1}{\lambda}(\varkappa+r+1-\lambda)!\,i^{\lambda}\Big(2\sin\frac{u}{2}\Big)^{\lambda}(n+r+3-\lambda)\cdots(n+r+2)\,e^{\frac{\lambda}{2}ui}\Big\}.$$

Mit A bezeichnen wir jetzt die Gesamtheit derjenigen Glieder rechts, in welchen $\lambda = r$, so daß

$$A = -\Re \frac{C_{rr} i^r}{r!} e^{-ui} (-1)^r (r+1)!\, i^r \Big(2 \sin \frac{u}{2}\Big)^r (n+3)\cdots(n+r+2)\, e^{\left(n+2+\frac{3r}{2}\right)ui}$$

$$+ \Re (r+1)(n+3)\cdots(n+r+2)\Big(2 \sin \frac{u}{2}\Big)^r \sum_{x=1}^{r} (x+1)!\, \frac{C_{xr} i^{r+x}}{x!} \Big(2 \sin \frac{u}{2}\Big)^{r-x} e^{\frac{x-2}{2} ui},$$

oder wegen $C_{rr} = 1$,

$$A = (-1)^r (r+1)\,(n+3)\cdots(n+r+2)\Big(2 \sin \frac{u}{2}\Big)^r \Big\{(r+1) \cos \frac{r-2}{2} u - (-1)^r \cdot$$

(36.)

$$\cos\Big(n+1+\frac{3r}{2}\Big)u + (-1)^r \Re\, 2 \sin \frac{u}{2} \sum_{x=1}^{r-1} (x+1)\, C_{xr} i^{r+x} \Big(2 \sin \frac{u}{2}\Big)^{r-1-x} e^{\frac{x-2}{2} ui}\Big\}.$$

Folglich ist für $u > 0$

$$(-1)^r A > (r+1)(n+3)\cdots(n+r+2)\Big(2 \sin \frac{u}{2}\Big)^r \Big\{(r+1) \cos \frac{r-2}{2} u - 1$$

$$- 2 \sin \frac{u}{2} \sum_{x=1}^{r-1} (x+1)\, C_{xr} \cdot 2^{r-1-x}\Big\},$$

und es läßt sich ein hinreichend kleines $u_0 < \pi/2$ festlegen, so daß die Klammer für $0 < u < u_0$ größer als $\frac{r+1}{4}$ wird, oder

(37.) $$(-1)^r A > \frac{(r+1)^2}{4} \Big(2n \sin \frac{u}{2}\Big)^r \quad \text{für } 0 < u < u_0 \text{ und } n \geqq r+2.$$

Was nach Abspaltung von A rechts in (35.) zurückbleibt, nennen wir B und erhalten für $u > 0$

$$|B| \leqq \Big| \sum_{\lambda=1}^{r-1} \binom{r+1}{\lambda} (n+r+3-\lambda)\cdots(n+r+2)\Big(2 \sin \frac{u}{2}\Big)^\lambda \cdot$$

$$\sum_{x=1}^{r} i^{\lambda+x} \frac{C_{xr}}{x!} \Big(2 \sin \frac{u}{2}\Big)^{r-x} (x+r+1-\lambda)!\, e^{\frac{x-r+\lambda-2}{2} ui}$$

$$- \sum_{\lambda=1}^{r-1} (n+r+3-\lambda)\cdots(n+r+2)\Big(2 \sin \frac{u}{2}\Big)^\lambda \cdot$$

$$\sum_{x=\lambda}^{r} i^{\lambda+x} \frac{C_{xr}}{x!} (-1)^\lambda \binom{x}{\lambda} (x+r+1-\lambda)! \Big(2 \sin \frac{u}{2}\Big)^{r-x} e^{\frac{2n+r+2+x+\lambda}{2} ui}$$

$$- \sum_{x=1}^{r} \frac{C_{xr} i^x}{x!} (x+r+1)! \Big(2 \sin \frac{u}{2}\Big)^{r-x} e^{\frac{x-r-2}{2} ui} (e^{(n+r+2)ui} - 1)\Big|$$

$$\leqq \sum_{\lambda=1}^{r-1} \binom{r+1}{\lambda} (2n)^\lambda \Big(2 \sin \frac{u}{2}\Big)^\lambda \sum_{x=1}^{r} \frac{(x+r+1-\lambda)!}{x!} C_{xr} \cdot 2^{r-x}$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{r-1} (2n)^\lambda \Big(2 \sin \frac{u}{2}\Big)^\lambda \sum_{x=\lambda}^{r} \binom{x}{\lambda} \frac{(x+r+1-\lambda)!}{x!} C_{xr} \cdot 2^{r-x}$$

$$+ \sum_{x=1}^{r} \frac{(x+r+1)!}{x!} C_{xr} \cdot 2^{r-x+1}$$

oder

$$(38.)\quad |B| \leqq \sum_{\lambda=0}^{r-1} B_\lambda \left(2n \sin\frac{u}{2}\right)^\lambda \quad \text{für } 0 < u < \pi \text{ und } n \geqq r+2,$$

wo die Konstanten B_λ von n unabhängig sind.

Infolgedessen ist für $0 < u < u_0$ und $n \geqq r+2$

$$(-1)^r (r+1)\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^{2r+2} \frac{d^r S_n^{(r+1)}(u)}{du^r} > \frac{(r+1)^2}{4}\left(2n\sin\frac{u}{2}\right)^r - \sum_{\lambda=0}^{r-1} B_\lambda \left(2n\sin\frac{u}{2}\right)^\lambda.$$

Es existiert offenbar eine positive Konstante c derart, daß der Ausdruck rechts positiv wird, sobald

$$2n \sin\frac{u}{2} > \frac{2c}{\pi}$$

ist; weil aber $u_0 < \pi/2$, so ist $\sin\frac{u}{2} > \frac{2}{\pi}\cdot\frac{u}{2}$, und die obige Ungleichung ist dann sicher erfüllt, wenn

$$2n \cdot \frac{2}{\pi}\cdot\frac{u}{2} > \frac{2c}{\pi},$$

und wir erhalten endlich das Resultat:

Es gibt zwei positive Konstanten $u_0 < \pi/2$ und c derart, daß

$$(39.)\quad (-1)^r \frac{d^r S_n^{(r+1)}(u)}{du^r} > 0 \qquad \text{für } \frac{c}{n} < u < u_0 \text{ und } n \geqq r+2.$$

Ferner gebrauchen wir zwei verschiedene Abschätzungen von $\frac{d^r s_n^{(r+1)}(u)}{du^r}$.

Erstens ist, weil der Ausdruck rechts in (35.) ein Polynom r-ten Grades in n ist

$$\left|\left(2\sin\frac{u}{2}\right)^{2r+2} \frac{d^r S_n^{(r+1)}(u)}{du^r}\right| < c_{11} n^r,$$

und nach Division durch $\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+r+1)}{(r+1)!}$ erhalten wir

$$(40.)\quad \left|\frac{d^r s_n^{(r+1)}(u)}{du^r}\right| < \frac{c_{12}}{n\cdot\left(\sin\frac{u}{2}\right)^{2r+2}},\quad -\pi \leqq u \leqq \pi,\quad n \geqq r+2.$$

Zweitens ist bekanntlich, wie aus (2.) unmittelbar folgt,

$$S_n^{(r+1)} = \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+r+1)}{(r+1)!}\, u_{n-\lambda},$$

und weil für $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_\lambda = \cos\lambda u$, $(\lambda = 1, 2, \ldots)$,

$$\left|\frac{d^r u_{n-\lambda}}{du^r}\right| \leqq (n-\lambda)^r \leqq n^r,$$

so wird

$$\left|\frac{d^r S_n^{(r+1)}(u)}{du^r}\right| < n^r \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+r+1)}{(r+1)!} = n^r \cdot \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+r+2)}{(r+2)!},$$

oder nach Division durch $\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+r+1)}{(r+1)!}$

$$(41.) \qquad \left|\frac{d^r s_n^{(r+1)}(u)}{du^r}\right| < n^{r+1}, \quad (n \geqq r+2).$$

Indem wir jetzt zum Beweise des Satzes III übergehen, bestimmen wir zunächst eine periodische und analytische Funktion $f_1(t)$, deren r-te, $(r-2)$-te, $(r-4)$-te, ... Ableitungen an der Stelle x mit den entsprechenden verallgemeinerten Ableitungen der gegebenen Funktion $f(t)$ übereinstimmen. Es sei z. B. r ungerade und gleich $2n+1$; dann genügt für $f_1(t)$ der Ansatz

$$f_1(t) = A_1(x)\sin(t-x) + A_3(x)\frac{\sin^3(t-x)}{3!} + \cdots + A_{2n+1}(x)\frac{\sin^{2n+1}(t-x)}{(2n+1)!}.$$

Wie sofort ersichtlich, ergibt die zu erfüllende Bedingung eine Reihe von linearen Gleichungen, welche für $A_1(x), \ldots A_{2n+1}(x)$ lineare Ausdrücke in $f^{(1)}(x), \ldots f^{(2n+1)}(x)$ mit rein numerischen Koeffizienten ergeben.

Schreiben wir noch $f(t)-f_1(t) = F(t)$, so ist einerseits

$$(42.) \quad \tfrac{1}{2}\left(F(x+h)+(-1)^r F(x-h)\right) = \omega(x,h)\frac{h^r}{r!}, \quad \lim_{h=0}\omega(x,h) = 0;$$

andererseits zufolge (30.)

$$\frac{d^r}{dx^r}s_n^{(r+1)}|f(x)| = \frac{d^r}{dx^r}s_n^{(r+1)}|f_1(x)| + \frac{d^r}{dx^r}s_n^{(r+1)}|F(x)|,$$

und drittens, wegen des schon bewiesenen Spezialfalles unseres Satzes

$$\lim_{n=\infty}\frac{d^r}{dx^r}s_n^{(r+1)}|f_1(x)| = f^{(r)}(x),$$

so daß also der Beweis von III sich auf den Nachweis der Beziehung

$$\lim_{n=\infty}\frac{d^r}{dx^r}s_n^{(r+1)}|F(x)| = 0$$

reduziert.

Indem wir $t = x+u$ einführen, ergibt (30.)

$$(43.) \qquad \begin{aligned}\frac{d^r}{dx^r}s_n^{(r+1)}|F(x)| &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} F(x+u)\frac{d^r}{du^r}s_n^{(r+1)}(u)\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{-\varepsilon} + \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi-x},\end{aligned}$$

wobei $\varepsilon < u_0$ angenommen werden möge. Unter Benutzung von (40.) und der absoluten Integrabilität von $f(t)$, aus welcher diejenige von $F(t)$ sofort folgt, finden wir:

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{-\varepsilon}+\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi-x}\right|<\frac{c_{12}}{n\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2r+2}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{-\varepsilon}|F(x+u)|\,du+\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi-x}|F(x+u)|\,du\right)$$

(44.)

$$\leqq\frac{c_{12}}{n\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2r+2}}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(t)|\,dt.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}=\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{0}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\varepsilon}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\varepsilon}\left(F(x+u)+(-1)^r F(x-u)\right)\frac{d^r s_n^{(r+1)}(u)}{du^r}\,du$$

oder zufolge (42.)

$$(45.)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\varepsilon}\omega(x,u)\,\frac{u^r}{r!}\,\frac{d^r s_n^{(r+1)}(u)}{du^r}\,du=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{c}{n}}+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{c}{n}}^{\varepsilon}.$$

Wird

$$\omega=\max.\,|\omega(x,u)|\ \text{ für }\ 0\leqq u\leqq\varepsilon$$

gesetzt, so ergibt (41.) die Abschätzung

$$(46.)\qquad \left|\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{c}{n}}\right|<\frac{2\omega}{\pi}\int_{0}^{\frac{c}{n}}n^{r+1}\,\frac{u^r}{r!}\,dr=\frac{2\omega}{\pi}\cdot\frac{c^{r+1}}{(r+1)!}.$$

Ferner ist, wegen $\varepsilon<u_0<\pi/2$,

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_{\frac{c}{n}}^{\varepsilon}\right|\leqq\frac{2\omega}{\pi}\int_{\frac{c}{n}}^{\varepsilon}\frac{u^r}{r!}\left|\frac{d^r s_n^{(r+1)}(u)}{du^r}\right|du<\frac{2\omega}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^r\int_{\frac{c}{n}}^{\varepsilon}\frac{\sin^r(u)}{r!}\left|\frac{d^r s_n^{(r+1)}(u)}{du^r}\right|du.$$

Weil aber wegen (39.) $\dfrac{d^r s_n^{(r+1)}(u)}{du^r}$ für $n\geqq r+2$ zwischen den Integrationsgrenzen ein unveränderliches Vorzeichen hat, so kann die letzte Ungleichung in der Form geschrieben werden

$$(47.)\qquad \left|\frac{2}{\pi}\int_{\frac{c}{n}}^{\varepsilon}\right|<\frac{2\omega}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^r\left|\int_{\frac{c}{n}}^{\varepsilon}\frac{\sin^r u}{r!}\,\frac{d^r s_n^{(r+1)}(u)}{du^r}\,du\right|.$$

Um das Integral rechts abzuschätzen, benutzen wir die Identität

$$(48.)\qquad \frac{2}{\pi}\int_{\frac{c}{n}}^{\varepsilon}\frac{\sin^r u}{r!}\,\frac{d^r s_n^{(r+1)}(u)}{du^r}\,du=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{c}{n}}-\frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}.$$

Es ist nun zufolge (30.)

$$\left[\frac{d^r}{dx^r}\,s_n^{(r+1)}\left\{\frac{\sin^r x}{r!}\right\}\right]_{x=0}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^r u}{r!}\,\frac{d^r s_n^{(r+1)}(u)}{du^r}\,du=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin^r u}{r!}\,\frac{d^r s_n^{(r+1)}(u)}{du^r}\,du,$$

und weil der Ausdruck links für $n=\infty$ dem Grenzwert

$$\left[\frac{d^r}{dx^r}\frac{\sin^r x}{r!}\right]_{x=0} = 1$$

zustrebt, so ist das Integral rechts für alle n beschränkt.

Für die zwei letzten Integrale in (48.) benutzen wir Abschätzungen, welche (46.) bzw. (44.) ganz analog sind, und erhalten

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_{\frac{c}{n}}^{\varepsilon}\frac{\sin^r u}{r!}\frac{d^r s_n^{(r+1)}(u)}{du^r}\,du\right| < c_{13} + \frac{c_{14}}{n\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2r+2}}.$$

Indem wir alle vorangehenden Abschätzungen in (43.) eintragen, erhalten wir schließlich

$$(49.)\qquad \left|\frac{d^r}{dx^r}s_n^{(r+1)}\{F(x)\}\right| < c_{15}\,\omega + \frac{1}{n\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2r+2}}\left(c_{16}\,\omega + c_{17}\int_{-\pi}^{\pi}|F(t)|\,dt\right).$$

Durch die Wahl eines hinreichend kleinen ε kann nun $c_{15}\,\omega$ kleiner als irgendeine vorgelegte Größe gemacht werden, und nach Festlegung eines solchen ε läßt sich auch das zweite Glied rechts in (49.) beliebig verkleinern, indem wir n größer oder gleich einem hinreichend großen N annehmen. Übrigens lassen sich, wie aus dem Beweisgange unmittelbar erhellt, ε und N gleichmäßig festlegen für alle x eines Intervalles der im Satz III angegebenen Art, und der Satz ist demnach in seinem vollen Umfange bewiesen.

Über Systeme von linearen Differenzengleichungen erster Ordnung.

Von Herrn *Oskar Perron* in Heidelberg.

§ 1.

Wenn die Koeffizienten der linearen Differenzengleichung n-ter Ordnung

$$X_{\nu+n} + a_1^{(\nu)} X_{\nu+n-1} + \cdots + a_n^{(\nu)} X_\nu = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

gewisse Grenzwerte haben:

$$\lim_{\nu=\infty} a_i^{(\nu)} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

und wenn die Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ der „charakteristischen Gleichung"

$$\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

lauter ungleiche absolute Beträge haben, so ist für jedes Integral X_ν, das nicht für alle hinreichend großen Werte von ν verschwindet, der Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_{\nu+1}}{X_\nu}$$

vorhanden und gleich einer Wurzel ϱ_i.

Das ist der Satz von *Poincaré*, für den ich vor ein paar Jahren einen exakten Beweis geliefert habe*). Die tiefer liegende Frage, ob stets Integrale vorhanden sind, für welche der obige Grenzwert gleich einer beliebig vorgegebenen unter den Wurzeln ϱ_i ist, konnte ich damals, falls $a_n^{(\nu)}$ für alle ν von Null verschieden ist, mit ja beantworten, und zwar ist für das allgemeine Integral der Grenzwert gleich der absolut größten Wurzel, und nur für gewisse Partikulärintegrale kommen die andern Wurzeln heraus.

*) Über einen Satz des Herrn *Poincaré*. Dieses Journal, Bd. 136 (1909).

Falls $a_n^{(\nu)} = 0$ zugelassen wird, ist der Satz offenbar unrichtig, weil es dann gar keine n linear unabhängigen Integrale gibt.

Van Vleck hat den *Poincaré*schen Satz übertragen auf Systeme von n Differenzengleichungen erster Ordnung*). Sein Hauptresultat, aus dem alles andre leicht durch eine lineare Transformation folgt, lautet:

„Wenn in dem System von n linearen Differenzengleichungen

$$(A.) \qquad X_{i,\nu+1} = \varrho_i X_{i,\nu} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}^{(\nu)} X_{k,\nu} \qquad (i=1,2,\dots n)$$

die Koeffizienten den Bedingungen

$$|\varrho_1| > |\varrho_2| > \cdots > |\varrho_n|,$$
$$\lim_{\nu=\infty} \delta_{i,k}^{(\nu)} = 0$$

genügen, so ist für jedes Integralsystem, das nicht von einem gewissen ν an dauernd verschwindet, ein Index j vorhanden derart, daß

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_{i,\nu}}{X_{j,\nu}} = 0 \qquad \text{für } i \neq j$$

und folglich nach (A.) auch

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_{j,\nu+1}}{X_{j,\nu}} = \varrho_j$$

ist."

Übrigens war dieser Satz auch von mir a. a. O. bereits bewiesen worden, und zwar auf einem Weg, der im Prinzip nicht allzusehr von dem *van Vleck*schen abweicht. Beide Beweise lassen sich leicht dahin ergänzen, daß für das allgemeine Integral der Index $j = 1$ ist, und *höchstens* für gewisse Partikulärintegrale $j > 1$ sein kann. Die tieferliegende Frage aber, ob es *wirklich* Partikulärintegrale gibt, bei denen der Index j ein *beliebig vorgegebener* ist, steht noch offen; sie wird im folgenden beantwortet (Satz 6). Gleichzeitig untersuchen wir aber auch sehr viel allgemeinere Systeme von Differenzengleichungen.

§ 2.

Wir betrachten das System von linearen Differenzengleichungen

$$(1.) \qquad X_{i,\nu+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{(\nu)} X_{k,\nu} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots n \\ \nu=0,1,2,\dots \end{pmatrix},$$

---

*) On the extension of a theorem of *Poincaré* for difference-equations. Transactions of the American mathematical society, vol. 13 (1912).

über dessen Koeffizienten wir folgendes voraussetzen:

$$\lim_{\nu=\infty} a_{i,k}^{(\nu)} = 0 \qquad \text{für } i > k, \tag{2.}$$

$$|a_{i,k}^{(\nu)}| \leqq C \qquad \text{für } i < k. \tag{3.}$$

Dabei sei C irgend eine gegebene Konstante. Nun führen wir nach Annahme von zwei beliebig kleinen positiven Zahlen ε und η die Abkürzung

$$\text{Max}\,(|a_{1,1}^{(\nu)}|, |a_{2,2}^{(\nu)}|, \ldots, |a_{n,n}^{(\nu)}|, \eta) = \gamma_\nu \tag{4.}$$

für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ ein und wählen eine positive Zahl $\alpha < 1$ derart, daß

$$(n-1)\,C\alpha < \eta\varepsilon, \tag{5.}$$

also erst recht

$$(n-1)\,C\alpha < \gamma_\nu \varepsilon \tag{6.}$$

ist. Nach (2.) und (3.) wird dann für genügend große ν gewiß

$$|a_{i,k}^{(\nu)}| \leqq C\alpha^{i+1-k} \qquad \text{für } i \neq k. \tag{7.}$$

Gilt das etwa von $\nu = \nu_0$ an, so kann man, wenn $X_{i,\nu}$ irgend ein Integral von (1.) bedeutet, eine Zahl G bestimmen, derart, daß für $\nu = \nu_0$

$$|X_{i,\nu}| < G\alpha^{i-1}\gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_{\nu-1}(1+\varepsilon)^\nu \qquad (i=1,2,\ldots n) \tag{8.}$$

ist. Wir behaupten dann, daß diese Ungleichung auch für $\nu > \nu_0$ dauernd bestehen bleibt. In der Tat, wenn sie für einen gewissen Wert von ν ($\geqq \nu_0$) richtig ist, so folgt aus (1.):

$$|X_{i,\nu+1}| \leqq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}^{(\nu)} X_{k,\nu}| \leqq G\gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_{\nu-1}(1+\varepsilon)^\nu \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}^{(\nu)}|\,\alpha^{k-1}.$$

Nach (7.) ist aber

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}^{(\nu)}|\,\alpha^{k-1} &\leqq |a_{i,i}^{(\nu)}|\,\alpha^{i-1} + \sum_{k}^{k\neq i} C\alpha^{i+1-k}\cdot\alpha^{k-1} \\ &= |a_{i,i}^{(\nu)}|\,\alpha^{i-1} + (n-1)\,C\alpha^i \\ &= \alpha^{i-1}(|a_{i,i}^{(\nu)}| + (n-1)\,C\alpha) \\ &< \alpha^{i-1}(\gamma_\nu + \gamma_\nu\varepsilon) \qquad \text{(nach (4.) und (6.))}.\end{aligned}$$

Setzt man das oben ein, so kommt:

$$\begin{aligned}|X_{i,\nu+1}| &< G\gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_{\nu-1}(1+\varepsilon)^\nu \alpha^{i-1}(\gamma_\nu + \gamma_\nu\varepsilon) \\ &= G\alpha^{i-1}\gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_{\nu-1}\gamma_\nu(1+\varepsilon)^{\nu+1}.\end{aligned}$$

Damit ist die Allgemeingültigkeit der Formel (8.) für $\nu \geqq \nu_0$ bewiesen. Aus ihr folgt nun:

$$\frac{|X_{i,\nu}|(1-\varepsilon)^\nu}{\gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_{\nu-1}} < G\alpha^{i-1}(1-\varepsilon^2)^\nu \qquad (\text{für } \nu \geqq \nu_0),$$

und somit ergibt sich:

Satz 1. *Die Koeffizienten des linearen Differenzengleichungensystems* (1.) *mögen den Bedingungen*

$$\lim_{\nu=\infty} a_{i,k}^{(\nu)} = 0 \qquad \textit{für } i > k$$

$$|a_{i,k}^{(\nu)}| \leqq C \qquad \textit{für } i < k$$

genügen. Dann gilt, wenn ε und η zwei beliebig kleine positive Zahlen bedeuten, und

$$\operatorname{Max}(|a_{1,1}^{(\nu)}|, |a_{2,2}^{(\nu)}|, \ldots, |a_{n,n}^{(\nu)}|, \eta) = \gamma_\nu$$

gesetzt wird, für jedes Integral von (1.) *die Beziehung*

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_{i,\nu}(1-\varepsilon)^\nu}{\gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_{\nu-1}} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

§ 3.

Zu den Voraussetzungen des § 2 mögen nun noch die folgenden hinzukommen:

$$(9.) \qquad |a_{1,1}^{(\nu)}| \geqq c$$

$$(10.) \qquad |a_{i,i}^{(\nu)}| \leqq \vartheta |a_{1,1}^{(\nu)}| \qquad (i = 2, 3, \ldots n),$$

wo c und ϑ gegebene positive Zahlen sind, und zwar $\vartheta < 1$. Dann kann man in Satz 1 $\eta < c$ wählen, so daß $\gamma_\nu = |a_{1,1}^{(\nu)}|$ wird. Daher ist

$$(I.) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{X_{i,\nu}(1-\varepsilon)^\nu}{a_{1,1}^{(0)} a_{1,1}^{(1)} \cdots a_{1,1}^{(\nu-1)}} = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots n).$$

Diese Beziehung läßt keine wesentliche Verschärfung mehr zu; vielmehr werden wir jetzt zeigen, daß es Integrale $X_{i,\nu}$ gibt, für welche, wie klein auch ε sei,

$$(II.) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{|X_{1,\nu}|(1+\varepsilon)^\nu}{|a_{1,1}^{(0)} a_{1,1}^{(1)} \cdots a_{1,1}^{(\nu-1)}|} = \infty$$

ist. Dabei müssen allerdings als Integrale auch solche Funktionen $X_{i,\nu}$ angesprochen werden, welche lediglich *für genügend große ν* existieren und dem System (1.) genügen; wir wollen sie der Deutlichkeit halber als „Integrale im weitern Sinne“ bezeichnen. Wollte man bei obiger Aussage verlangen, daß die Integrale schon von $\nu = 0$ an existieren und dem System (1.) genügen (Integrale im engern Sinne), so müßte man noch

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}^{(\nu)} & a_{1,2}^{(\nu)} & \cdots & a_{1,n}^{(\nu)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1}^{(\nu)} & a_{n,2}^{(\nu)} & \cdots & a_{n,n}^{(\nu)} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (\nu=0, 1, 2, \ldots)$$

voraussetzen. Dann könnte man nämlich das System (1.) nach $X_{1,\nu}, X_{2,\nu}, \ldots X_{n,}$ auflösen und daher die Funktionen $X_{i,\nu}$, wenn sie für irgend einen Wert von ν bekannt sind, für die kleineren Werte nachträglich ergänzen. Ohne diese Voraussetzung aber kann es beispielsweise passieren, daß jedes für

$\nu = 0$ definierte Integral für große Werte von ν identisch verschwindet; dann gilt also die Behauptung (II.) gewiß nicht für Integrale im engern Sinne*).

Nun sei Θ eine Zahl im Intervall

$$\sqrt[n]{\vartheta} < \Theta < 1;$$

ferner bedeute α eine positive Zahl, die kleiner als 1 und im übrigen so klein ist, daß

$$(11.) \qquad (n-1)C\alpha < c,$$

$$(12.) \qquad \frac{(n-1)C\alpha(1+\vartheta)}{c-(n-1)C\alpha} < \Theta^n - \vartheta$$

wird. Dann ist wieder wegen (2.) und (3.) für genügend große ν

$$(13.) \qquad |a_{i,k}^{(\nu)}| \leqq C\alpha^{i+1-k} \qquad \text{für } i \neq k.$$

Das sei etwa von $\nu = \nu_0$ an der Fall. Für den Index ν_0 lassen sich die Werte eines Integralsystems (im weitern Sinne) willkürlich vorgeben, und dann ist das ganze Integralsystem bestimmt. Wir wählen sie so, daß für $\nu = \nu_0$

$$(14.) \qquad |X_{i,\nu}| < \alpha^{i-1}\,|X_{1,\nu}| \qquad (i = 2, 3, \ldots n)$$

ist**), und behaupten, daß diese Ungleichung dann auch für $\nu > \nu_0$ gilt. Denn, wenn sie für einen gewissen Wert ν ($\geqq \nu_0$) richtig ist, so folgt aus (1.):

$$|X_{i,\nu+1}| \leqq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}^{(\nu)} X_{k,\nu}| \leqq |X_{1,\nu}| \cdot \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}^{(\nu)}|\,\alpha^{k-1},$$

und auch

$$|X_{1,\nu+1}| \geqq |a_{1,1}^{(\nu)} X_{1,\nu}| - \sum_{k=2}^{n} |a_{1,k}^{(\nu)} X_{k,\nu}| \geqq |X_{1,\nu}| \cdot (|a_{1,1}^{(\nu)}| - \sum_{k=2}^{n} |a_{1,k}^{(\nu)}|\,\alpha^{k-1}).$$

Nun ist aber wie auf Seite 38

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}^{(\nu)}|\,\alpha^{k-1} \leqq \alpha^{i-1}(|a_{i,i}^{(\nu)}| + (n-1)C\alpha)$$

und speziell für $i = 1$

$$\sum_{k=2}^{n} |a_{1,k}^{(\nu)}|\,\alpha^{k-1} \leqq (n-1)C\alpha.$$

Setzt man das oben ein, so kommt mit Berücksichtigung von (10.) und (9.):

$$|X_{i,\nu+1}| \leqq |X_{1,\nu}| \cdot (|a_{i,i}^{(\nu)}| + (n-1)C\alpha)\,\alpha^{i-1} \leqq |X_{1,\nu}| \cdot (\vartheta\,|a_{1,1}^{(\nu)}| + (n-1)C\alpha)\,\alpha^{i-1},$$

$$(i=2,3,\ldots n)$$

$$|X_{1,\nu+1}| \geqq |X_{1,\nu}| \cdot (|a_{1,1}^{(\nu)}| - (n-1)C\alpha) \qquad \geqq |X_{1,\nu}| \cdot (c - (n-1)C\alpha) > 0.$$

Daher durch Division:

$$\left|\frac{X_{i,\nu+1}}{X_{1,\nu+1}}\right| \leqq \frac{\vartheta\,|a_{1,1}^{(\nu)}| + (n-1)C\alpha}{|a_{1,1}^{(\nu)}| - (n-1)C\alpha}\,\alpha^{i-1}.$$

---

*) In Satz 1 ist es offenbar gleichgültig, ob man als Integrale nur solche im engern oder auch solche im weitern Sinne zuläßt.

**) Der Ausschluß der Gleichheit garantiert hier, daß $X_{1,\nu} \neq 0$ ist, so daß wir später durch $X_{1,\nu}$ dividieren können.

Nun ist aber mit Rücksicht auf (12.)

$$\frac{\vartheta\left|a_{1,1}^{(\nu)}\right|+(n-1)C\alpha}{\left|a_{1,1}^{(\nu)}\right|-(n-1)C\alpha}=\vartheta+\frac{(n-1)C\alpha(1+\vartheta)}{\left|a_{1,1}^{(\nu)}\right|-(n-1)C\alpha}$$

$$\leqq\vartheta+\frac{(n-1)C\alpha(1+\vartheta)}{c-(n-1)C\alpha}<\Theta^{n}<\Theta^{i-1}.$$

Daher ergibt sich schließlich:

$$\left|X_{i,\nu+1}\right|<(\Theta\alpha)^{i-1}\left|X_{1,\nu+1}\right|<\alpha^{i-1}\left|X_{1,\nu+1}\right| \qquad (i=2,3,\ldots n).$$

Damit ist die Allgemeingültigkeit der Ungleichung (14.) für $\nu\geqq\nu_0$ bewiesen. Zugleich ersieht man, daß darin α für $\nu>\nu_0$ sogar durch $\Theta\alpha$ ersetzt werden darf. Da aber auch die Ungleichungen (11.), (12.), (13.), wenn man darin α durch $\Theta\alpha$ ersetzt, richtig bleiben, die letztere von einem gewissen ν, etwa von $\nu=\nu_1$ an, so kann unsere ganze Deduktion mit $\Theta\alpha$ an Stelle von α wiederholt werden. Dann ergibt sich, daß für $\nu>\nu_1$ sogar

$$\left|X_{i,\nu}\right|<(\Theta^{2}\alpha)^{i-1}\left|X_{1,\nu}\right| \qquad (i=2,3,\ldots n)$$

ist. Aber auch die Ungleichungen (11.), (12.), (13.) sind wieder richtig (die letztere von einem gewissen ν an), wenn $\Theta^2\alpha$ an Stelle von α tritt, und folglich läßt sich die ganze Deduktion mit $\Theta^2\alpha$ an Stelle von α wiederholen. So fortfahrend erhält man schließlich, wenn p eine beliebig große positive ganze Zahl bedeutet, für genügend große Werte von ν:

$$\left|X_{i,\nu}\right|<(\Theta^{p}\alpha)^{i-1}\left|X_{1,\nu}\right|. \qquad (i=2,3,\ldots n)$$

Das besagt aber soviel wie

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{X_{i,\nu}}{X_{1,\nu}}=0. \qquad (i=2,3,\ldots n)$$

Aus (1.) für $i=1$ folgt dann, indem man durch $X_{1,\nu}$ dividiert,

$$\lim_{\nu=\infty}\left(\frac{X_{1,\nu+1}}{X_{1,\nu}}-a_{1,1}^{(\nu)}\right)=0.$$

Wegen dieser Beziehung ist aber, wenn ε_1 eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, für genügend große ν

$$\left|\frac{X_{1,\nu+1}}{X_{1,\nu}}\right|>\left|a_{1,1}^{(\nu)}\right|-\frac{c\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}\geqq\left|a_{1,1}^{(\nu)}\right|-\frac{\left|a_{1,1}^{(\nu)}\right|\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}=\frac{\left|a_{1,1}^{(\nu)}\right|}{1+\varepsilon_1}.$$

Gilt das etwa von $\nu=N$ an, so folgt für $\nu>N$:

$$\left|X_{1,\nu}\right|>\left|X_{1,N}\right|\cdot\frac{\left|a_{1,1}^{(N)}a_{1,1}^{(N+1)}\ldots a_{1,1}^{(\nu-1)}\right|}{(1+\varepsilon_1)^{\nu-N}}>0,$$

woraus sich sofort die behauptete Beziehung (II.) ergibt, indem man $\varepsilon_1<\varepsilon$ wählt. Somit ist bewiesen:

Satz 2. *Zu den Bedingungen des Satz 1 mögen noch die folgenden hinzukommen:*

$$|a_{1,1}^{(\nu)}| \geqq c, \cdot$$
$$|a_{i,i}^{(\nu)}| \leqq \vartheta\, |a_{1,1}^{(\nu)}|, \qquad (i=2,3,\dots n)$$

wo c und ϑ gegebene positive Zahlen sind, und zwar $\vartheta < 1$. Dann gibt es ein Integral im weitern Sinne, für welches

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_{i,\nu}}{X_{1,\nu}} = 0$$

und folglich auch

$$\lim_{\nu=\infty} \Big(\frac{X_{1,\nu+1}}{X_{1,\nu}} - a_{1,1}^{(\nu)} \Big) = 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{|X_{1,\nu}|(1+\varepsilon)^\nu}{|a_{1,1}^{(0)} a_{1,1}^{(1)} \dots a_{1,1}^{(\nu-1)}|} = \infty \quad (\varepsilon > 0 \text{ beliebig klein})$$

ist.

§ 4.

Unter den Voraussetzungen des Satz 2 sei $Y_{i,\nu}$ ein Integral der dort angegebenen Art; dann ist also

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{|Y_{1,\nu}|(1+\varepsilon)^\nu}{|a_{1,1}^{(0)} a_{1,1}^{(1)} \dots a_{1,1}^{(\nu-1)}|} = \infty. \tag{15.}$$

Andererseits auch (vgl. Formel (I.) Seite 39):

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{|Y_{i,\nu}(1-\varepsilon)^\nu}{a_{1,1}^{(0)} a_{1,1}^{(1)} \dots a_{1,1}^{(\nu-1)}} = 0. \qquad (i=1,2,\dots n) \tag{16.}$$

Nun wollen wir zeigen, daß jedes Integral von (1.) sich linear zusammensetzt aus $Y_{i,\nu}$ und solchen Integralen, die infinitär wesentlich kleiner als $Y_{1,\nu}$ sind. Es gilt nämlich

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen des Satz 2 sei $Y_{i,\nu}$ irgend ein Integral der dort angegebenen Art. Dann hat jedes andere Integral (im weiteren Sinne) die Form*

$$X_{i,\nu} = K\, Y_{i,\nu} + Z_{i,\nu}, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

wobei K eine Konstante ist und $Z_{i,\nu}$ ein Integral, für welches die Beziehung gilt:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{Z_{i,\nu}\left(\frac{1-\varepsilon}{\vartheta}\right)^\nu}{a_{1,1}^{(0)} a_{1,1}^{(1)} \dots a_{1,1}^{(\nu-1)}} = 0. \qquad (i=1,2,\dots n)$$

Dabei darf $\varepsilon > 0$ beliebig klein sein.

Natürlich gilt der Satz a fortiori auch für Integrale im engern Sinne, weil diese ja unter den Integralen im weitern Sinne mit inbegriffen sind.

Nach Satz 2 ist

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{Y_{i,\nu}}{Y_{1,\nu}} = 0, \qquad (i=2,3,\dots n) \tag{17.}$$

so daß $Y_{1,\nu}$ für genügend große ν, etwa für $\nu \geqq N$, jedenfalls von Null verschieden ist. Daher können wir in dem System (1.) an Stelle der Funktionen

$$X_{1,\nu}, X_{2,\nu}, \dots, X_{n,\nu}$$

die neuen Unbekannten

$$U_\nu, V_{1,\nu}, V_{2,\nu}, \dots, V_{n-1,\nu}$$

einführen, indem wir setzen:

$$\begin{cases} X_{1,\nu} = Y_{1,\nu} U_\nu, \\ X_{i,\nu} = Y_{i,\nu} U_\nu + V_{i-1,\nu}. \end{cases} \qquad (i=2,3,\dots n) \tag{18.}$$

Das System (1.) geht dadurch über in:

$$Y_{1,\nu+1} U_{\nu+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}^{(\nu)} Y_{k,\nu} U_\nu + \sum_{k=2}^{n} a_{1,k}^{(\nu)} V_{k-1,\nu} = Y_{1,\nu+1} U_\nu + \sum_{k=2}^{n} a_{1,k}^{(\nu)} V_{k-1,\nu},$$

$$Y_{i,\nu+1} U_{\nu+1} + V_{i-1,\nu+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{(\nu)} Y_{k,\nu} U_\nu + \sum_{k=2}^{n} a_{i,k}^{(\nu)} V_{k-1,\nu} = Y_{i,\nu+1} U_\nu + \sum_{k=2}^{n} a_{i,k}^{(\nu)} V_{k-1,\nu}. \qquad (i=2,3,\dots n)$$

Oder also:

$$U_\nu - U_{\nu+1} = -\sum_{k=2}^{n} a_{1,k}^{(\nu)} \frac{V_{k-1,\nu}}{Y_{1,\nu+1}}, \tag{19.}$$

$$V_{i-1,\nu+1} = \sum_{k=2}^{n} a_{i,k}^{(\nu)} V_{k-1,\nu} + Y_{i,\nu+1}(U_\nu - U_{\nu+1}). \qquad (i=2,3,\dots n) \tag{20.}$$

Setzt man den Ausdruck für $U_\nu - U_{\nu+1}$ aus (19.) in (20.) ein, so kommt:

$$V_{i-1,\nu+1} = \sum_{k=2}^{n} \left(a_{i,k}^{(\nu)} - \frac{Y_{i,\nu+1}}{Y_{1,\nu+1}} a_{1,k}^{(\nu)} \right) V_{k-1,\nu}. \qquad (i=2,3,\dots n) \tag{21.}$$

Das System (1.) mit n homogenen Gleichungen ist damit für $\nu \geqq N$ zurückgeführt auf das System (21.) mit nur $n-1$ homogenen Gleichungen und die inhomogene Gleichung (19.). Auf das System (21.) treffen wegen (17.) die Voraussetzungen des Satz 1 zu. Versteht man demgemäß unter ε_1 und η zwei beliebig kleine positive Zahlen und setzt

$$\operatorname{Max}\left(\left| a_{2,2}^{(\nu)} - \frac{Y_{2,\nu+1}}{Y_{1,\nu+1}} a_{1,2}^{(\nu)} \right|, \dots, \left| a_{n,n}^{(\nu)} - \frac{Y_{n,\nu+1}}{Y_{1,\nu+1}} a_{1,n}^{(\nu)} \right|, \eta \right) = \gamma_\nu, \tag{22.}$$

so ist für jedes Integral von (21.)

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{V_{i-1,\nu}\,(1-\varepsilon_1)^{\nu-N}}{\gamma_N \gamma_{N+1} \cdots \gamma_{\nu-1}} = 0. \qquad (i=2,3,\dots n) \tag{23.}$$

Mit Rücksicht auf (17.) ist aber für genügend große ν und $i = 2, 3, \dots n$

$$|a_{i,i}^{(\nu)} - \frac{Y_{i,\nu+1}}{Y_{1,\nu+1}} a_{1,i}^{(\nu)}| < |a_{i,i}^{(\nu)}| + \vartheta c \varepsilon_1$$
$$\leqq \vartheta |a_{1,1}^{(\nu)}| + \vartheta |a_{1,1}^{(\nu)}| \varepsilon_1 = \vartheta (1+\varepsilon_1) |a_{1,1}^{(\nu)}|.$$

Man kann annehmen, daß das schon von $\nu = N$ an gilt, indem man N von vornherein genügend groß denkt. Wählt man dann die in (22.) auftretende Zahl η kleiner als ϑc, also erst recht kleiner als $\vartheta |a_{1,1}^{(\nu)}|$, so wird

$$\gamma_\nu < \vartheta (1+\varepsilon_1) |a_{1,1}^{(\nu)}|$$

für $\nu \geqq N$, und aus (23.) folgt:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{V_{i-1,\nu} \left(\frac{1-\varepsilon_1}{\vartheta(1+\varepsilon_1)}\right)^{\nu-N}}{a_{1,1}^{(N)} a_{1,1}^{(N+1)} \dots a_{1,1}^{(\nu-1)}} = 0. \qquad (i=2,3,\dots n)$$

Dafür kann man einfacher schreiben, indem man $\frac{1-\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} = 1 - \varepsilon_2$ setzt, wobei auch ε_2 beliebig klein sein darf,

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{V_{i-1,\nu} \left(\frac{1-\varepsilon_2}{\vartheta}\right)^{\nu}}{a_{1,1}^{(0)} a_{1,1}^{(1)} \dots a_{1,1}^{(\nu-1)}} = 0. \qquad (i=2,3,\dots n) \tag{24.}$$

Nun sei $V_{i-1,\nu}$ irgend ein Integral von (21.), so daß gewiß die Beziehung (24.) gilt; also für genügend große ν:

$$|V_{i-1,\nu}| < \left(\frac{\vartheta}{1-\varepsilon_2}\right)^{\nu} |a_{1,1}^{(0)} a_{1,1}^{(1)} \dots a_{1,1}^{(\nu-1)}|. \qquad (i=2,3,\dots n) \tag{25.}$$

Andrerseits ist nach (15.), da man dort speziell auch $\varepsilon = \varepsilon_2$ setzen darf,

$$|Y_{1,\nu+1}| > \frac{1}{(1+\varepsilon_2)^{\nu}} |a_{1,1}^{(0)} a_{1,1}^{(1)} \dots a_{1,1}^{(\nu-1)} a_{1,1}^{(\nu)}| \geqq \frac{c}{(1+\varepsilon_2)^{\nu}} |a_{1,1}^{(0)} a_{1,1}^{(1)} \dots a_{1,1}^{(\nu-1)}|.$$

Daher durch Division:

$$\left|\frac{V_{i-1,\nu}}{Y_{1,\nu+1}}\right| < \frac{1}{c} \vartheta^{\nu} \left(\frac{1+\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2}\right)^{\nu}. \qquad (i=2,3,\dots n)$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$-\sum_{k=2}^{n} a_{1,k}^{(\nu)} \frac{V_{k-1,\nu}}{Y_{1,\nu+1}} = P_\nu,$$

so ist (wegen $|a_{i,k}^{(\nu)}| < C$ für $i < k$), wenn ν genügend groß:

$$|P_\nu| < \frac{(n-1)C}{c} \vartheta^{\nu} \left(\frac{1+\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2}\right)^{\nu}, \tag{26.}$$

und nach (19.) muß nun noch die inhomogene Gleichung

$$U_\nu - U_{\nu+1} = P_\nu \tag{27.}$$

gelöst werden. Da die unendliche Reihe $P_\nu + P_{\nu+1} + P_{\nu+2} + \cdots$ wegen (26.) gewiß konvergiert, so ist die allgemeinste Lösung von (27.) die folgende:

$$U_\nu = K + P_\nu + P_{\nu+1} + P_{\nu+2} + \cdots, \tag{28.}$$

wo K eine willkürliche Konstante ist. Setzt man das in (18.) ein, so erhält man für das allgemeine Integral von (1.):

$$X_{i,\nu} = K\,Y_{i,\nu} + Z_{i,\nu}, \qquad (i=1,2,\dots n) \tag{29.}$$

wobei

$$\begin{cases} Z_{1,\nu} = Y_{1,\nu}(P_\nu + P_{\nu+1} + P_{\nu+2} + \cdots), \\ Z_{i,\nu} = Y_{i,\nu}(P_\nu + P_{\nu+1} + P_{\nu+2} + \cdots) + V_{i-1,\nu} \qquad (i=2,3,\dots n) \end{cases} \tag{30.}$$

ist. Nun muß für die Funktionen $Z_{i,\nu}$, die nach (29.) offenbar auch ein Integral von (1.) bilden, noch die in Satz 3 behauptete Formel nachgewiesen werden. Nach (16.) und (26.) ist aber für genügend große ν und $i = 1, 2, \dots n$:

$$|Y_{i,\nu}(P_\nu + P_{\nu+1} + P_{\nu+2} + \cdots)| < \frac{|a_{1,1}^{(0)} a_{1,1}^{(1)} \cdots a_{1,1}^{(\nu-1)}|}{(1-\varepsilon_2)^\nu} \frac{(n-1)C}{c} \vartheta^\nu \Big(\frac{1+\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2}\Big)^\nu \cdot \frac{1}{1-\vartheta\left(\frac{1+\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2}\right)}$$

$$< G\,|a_{1,1}^{(0)} a_{1,1}^{(1)} \cdots a_{1,1}^{(\nu-1)}|\, \vartheta^\nu \Big(\frac{1+\varepsilon_2}{(1-\varepsilon_2)^2}\Big)^\nu,$$

wo G eine Konstante ist. Setzt man $\dfrac{1+\varepsilon_2}{(1-\varepsilon_2)^2} = \dfrac{1}{1-\varepsilon_3}$, so darf auch ε_3 beliebig klein sein, und man erhält:

$$|Y_{i,\nu}(P_\nu + P_{\nu+1} + P_{\nu+2} + \cdots)| < G\,|a_{1,1}^{(0)} a_{1,1}^{(1)} \cdots a_{1,1}^{(\nu-1)}| \Big(\frac{\vartheta}{1-\varepsilon_3}\Big)^\nu. \qquad (i=1,2,\dots n)$$

Trägt man dies sowie die Abschätzung (25.) in (30.) ein, so kommt:

$$|Z_{i,\nu}| < |a_{1,1}^{(0)} a_{1,1}^{(1)} \cdots a_{1,1}^{(\nu-1)}|\, \vartheta^\nu \cdot \Big(\frac{G}{(1-\varepsilon_3)^\nu} + \frac{1}{(1-\varepsilon_2)^\nu}\Big). \qquad (i=1,2,\dots n)$$

Hieraus folgt aber sofort Satz 3, indem man ε_2 und ε_3 kleiner als die dort auftretende Zahl ε wählt.

§ 5.

Wir legen wieder das System (1.) zugrunde, machen aber jetzt die Voraussetzungen:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\nu=\infty} a_{i,k}^{(\nu)} = 0 & \text{für } i \neq k \\ |a_{i,i}^{(\nu)}| \leqq \vartheta\,|a_{i-1,i-1}^{(\nu)}| & (i = 2,3,\dots n) \\ |a_{n-1,n-1}^{(\nu)}| \geqq c, \end{cases} \tag{31.}$$

wo ϑ und c gegebene positive Zahlen sind, und zwar $\vartheta < 1$. Dann sind eo ipso die früheren Bedingungen erfüllt, so daß gewiß die Sätze 1, 2, 3 gelten. Wir beweisen aber weiter

Satz 4. *Die Koeffizienten des linearen Differenzengleichungensystems*

$$X_{i,\nu+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{(\nu)} X_{k,\nu} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots n \\ \nu=0,1,2,\dots \end{pmatrix} \tag{1.}$$

mögen den Bedingungen (31.) *genügen. Ist dann j eine der Zahlen* $1, 2, \dots n-1$, *so gibt es ein Integral (im weitern Sinne) $X_{i,\nu}^{(j)}$, für welches*

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_{i,\nu}^{(j)}}{X_{j,\nu}^{(j)}} = 0 \qquad \textit{für } i \neq j,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \left(\frac{X_{j,\nu+1}^{(j)}}{X_{j,\nu}^{(j)}} - a_{j,j}^{(\nu)} \right) = 0$$

ist. Das gleiche gilt für $j = n$ dann und nur dann, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}^{(\nu)} a_{1,2}^{(\nu)} \dots a_{1,n}^{(\nu)} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n,1}^{(\nu)} a_{n,2}^{(\nu)} \dots a_{n,n}^{(\nu)} \end{vmatrix}$$

für alle hinreichend großen ν von Null verschieden ist; also insbesondere, wenn $|a_{n,n}^{(\nu)}|$ für alle hinreichend großen ν oberhalb einer positiven Schranke c_1 bleibt.

Die $n-1$ bezw. n Integrale

$$X_{i,\nu}^{(1)}, X_{i,\nu}^{(2)}, \dots X_{i,\nu}^{(n-1)}, (X_{i,\nu}^{(n)})$$

sind linear unabhängig.

Wir sehen zunächst vom Integral $X_{i,\nu}^{(n)}$ ab. Dann ist der Satz für $n = 2$ enthalten in Satz 2, also richtig. Wir dürfen daher den Schluß von $n-1$ auf n anwenden. Nun existiert nach Satz 2 jedenfalls ein Integral $X_{i,\nu}^{(1)}$, für welches

$$\text{(32.)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{X_{i,\nu}^{(1)}}{X_{1,\nu}^{(1)}} = 0 \qquad \text{für } i > 1,$$

$$\text{(33.)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \left(\frac{X_{1,\nu+1}^{(1)}}{X_{1,\nu}^{(1)}} - a_{1,1}^{(\nu)} \right) = 0$$

ist. Aus (33.) folgt, wenn $\varepsilon > 0$ beliebig klein ist, für genügend große ν:

$$\text{(34.)} \qquad \left| \frac{X_{1,\nu+1}^{(1)}}{X_{1,\nu}^{(1)}} \right| > |a_{1,1}^{(\nu)}| - c\varepsilon > |a_{1,1}^{(\nu)}|(1-\varepsilon).$$

Macht man nun analog zu (18.) die Transformation

$$\text{(35.)} \qquad \begin{cases} X_{1,\nu} = X_{1,\nu}^{(1)} U_\nu, \\ X_{i,\nu} = X_{i,\nu}^{(1)} U_\nu + V_{i-1,\nu}, & (i=2,3,\dots n) \end{cases}$$

so geht das System (1.) über in (vergl. (19.) und (21)):

$$\text{(36.)} \qquad U_\nu - U_{\nu+1} = -\sum_{k=2}^{n} a_{1,k}^{(\nu)} \frac{V_{k-1,\nu}}{X_{1,\nu+1}^{(1)}},$$

$$\text{(37.)} \qquad V_{i-1,\nu+1} = \sum_{k=2}^{n} \left(a_{i,k}^{(\nu)} - \frac{X_{i,\nu+1}^{(1)}}{X_{1,\nu+1}^{(1)}} a_{1,k}^{(\nu)} \right) V_{k-1,\nu}. \qquad (i=2,3,\dots n)$$

Bei dem System (37.) treffen für genügend große ν die Voraussetzungen des Satz 4 zu; nur ist n durch $n-1$ ersetzt, so daß wir diesen Satz auf (37.) anwenden dürfen. Bezeichnet daher j einen der Indizes $2, 3, \dots n-1$, so gibt es ein Integral $V_{i-1,\nu}^{(j)}$ von (37.), für welches

$$\text{(38.)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{V^{(j)}_{i-1,\nu}}{V^{(j)}_{j-1,\nu}} = 0 \qquad \text{für } i \neq j,$$

$$\text{(39.)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \left(\frac{V^{(j)}_{j-1,\nu+1}}{V^{(j)}_{j-1,\nu}} - a^{(\nu)}_{j,j} + \frac{X^{(1)}_{j,\nu+1}}{X^{(1)}_{1,\nu+1}} a^{(\nu)}_{1,j} \right) = 0$$

ist, oder statt (39.) einfacher (wegen (31.) und (32.)):

$$\text{(40.)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \left(\frac{V^{(j)}_{j-1,\nu+1}}{V^{(j)}_{j-1,\nu}} - a^{(\nu)}_{j,j} \right) = 0.$$

Aus (40.) folgt für genügend große ν:

$$\text{(41.)} \qquad \left| \frac{V^{(j)}_{j-1,\nu+1}}{V^{(j)}_{j-1,\nu}} \right| < |a^{(\nu)}_{j,j}| + c\,\vartheta\,\varepsilon < \vartheta\,|a^{(\nu)}_{1,1}| + |a^{(\nu)}_{1,1}|\,\vartheta\,\varepsilon = |a^{(\nu)}_{1,1}|\,\vartheta(1+\varepsilon).$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\text{(42.)} \qquad -\sum_{k=2}^{n} a^{(\nu)}_{1,k} \frac{V^{(j)}_{k-1,\nu}}{X^{(1)}_{1,\nu+1}} = P^{(j)}_{\nu},$$

so geht die inhomogene Gleichung (36.), wenn man rechts für $V_{i,\nu}$ speziell das Integral $V^{(j)}_{i,\nu}$ wählt, über in folgende:

$$U_\nu - U_{\nu+1} = P^{(j)}_\nu;$$

und diese hat unter andern die Lösung:

$$U_\nu = P^{(j)}_\nu + P^{(j)}_{\nu+1} + P^{(j)}_{\nu+2} + \cdots,$$

welche wir mit $U^{(j)}_\nu$ bezeichnen wollen*). Nach (35.) ist dann

$$\text{(43.)} \qquad \begin{cases} X^{(j)}_{1,\nu} = X^{(1)}_{1,\nu} U^{(j)}_\nu, \\ X^{(j)}_{i,\nu} = X^{(1)}_{i,\nu} U^{(j)}_\nu + V^{(j)}_{i-1,\nu} & (i=2,3,\ldots n) \end{cases}$$

ein Integral von (1.). Wir wollen zeigen, daß diesem die in Satz 4 behaupteten Eigenschaften zukommen. Nun ist

$$U^{(j)}_\nu = \sum_{\mu=0}^{\infty} P^{(j)}_{\nu+\mu} = -\sum_{k=2}^{n} \sum_{\mu=0}^{\infty} a^{(\nu+\mu)}_{1,k} \frac{V^{(j)}_{k-1,\nu+\mu}}{X^{(1)}_{1,\nu+\mu+1}}.$$

Daher

$$\text{(44.)} \qquad \left| \frac{X^{(1)}_{1,\nu} U^{(j)}_\nu}{V^{(j)}_{j-1,\nu}} \right| \leqq \sum_{k=2}^{n} \sum_{\mu=0}^{\infty} |a^{(\nu+\mu)}_{1,k}| \cdot \left| \frac{V^{(j)}_{k-1,\nu+\mu}}{V^{(j)}_{j-1,\nu+\mu}} \right| \cdot \left| \frac{V^{(j)}_{j-1,\nu+\mu}}{V^{(j)}_{j-1,\nu}} \right| \cdot \left| \frac{X^{(1)}_{1,\nu}}{X^{(1)}_{1,\nu+\mu+1}} \right|.$$

Für genügend große ν ist aber

$$|a^{(\nu+\mu)}_{1,k}| < \varepsilon \qquad \text{(nach (31.))},$$

$$\left| \frac{V^{(j)}_{k-1,\nu+\mu}}{V^{(j)}_{j-1,\nu+\mu}} \right| \leqq 1 \qquad \text{(nach (38.))},$$

$$\left| \frac{V^{(j)}_{j-1,\nu+\mu}}{V^{(j)}_{j-1,\nu}} \right| < |a^{(\nu)}_{1,1} a^{(\nu+1)}_{1,1} \ldots a^{(\nu+\mu-1)}_{1,1}|\,\vartheta^\mu (1+\varepsilon)^\mu \qquad \text{(nach (41.))},$$

$$\left| \frac{X^{(1)}_{1,\nu}}{X^{(1)}_{1,\nu+\mu+1}} \right| < \frac{1}{|a^{(\nu)}_{1,1} a^{(\nu+1)}_{1,1} \ldots a^{(\nu+\mu-1)}_{1,1} a^{(\nu+\mu)}_{1,1}|(1-\varepsilon)^{\mu+1}} \qquad \text{(nach (34.))}.$$

*) Daß die Reihe konvergiert, lehrt die sogleich vorzunehmende Abschätzung (Seite 48 oben).

Wendet man diese Abschätzungen in (44.) an, so folgt:

$$\left|\frac{X_{1,\nu}^{(1)} U_\nu^{(j)}}{V_{j-1,\nu}^{(j)}}\right| \leqq (n-1) \sum_{\mu=0}^{\infty} \varepsilon \frac{\vartheta^\mu (1+\varepsilon)^\mu}{\left|a_{1,1}^{(\nu+\mu)}\right| (1-\varepsilon)^{\mu+1}}$$

$$< \frac{(n-1)\varepsilon}{c(1-\varepsilon)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\vartheta^\mu (1+\varepsilon)^\mu}{(1-\varepsilon)^\mu} = \frac{(n-1)\varepsilon}{c(1-\varepsilon)} \cdot \frac{1}{1-\frac{\vartheta(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon}}.$$

Daher ist, weil hier ε beliebig klein sein darf,

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_{1,\nu}^{(1)} U_\nu^{(j)}}{V_{j-1,\nu}^{(j)}} = 0,$$

und also nach (32.) erst recht für $i > 1$:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_{i,\nu}^{(1)} U_\nu^{(j)}}{V_{j-1,\nu}^{(j)}} = 0.$$

Mit Rücksicht hierauf folgt sogleich aus (43.):

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_{i,\nu}^{(j)}}{V_{j-1,\nu}^{(j)}} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j. \end{cases}$$

Daher auch:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_{i,\nu}^{(j)}}{X_{j,\nu}^{(j)}} = 0 \qquad \text{für } i \neq j. \tag{45.}$$

Schließlich ergibt sich aus der j-ten Gleichung des Systems (1.) selbst, indem man durch $X_{j,\nu}$ dividiert und dann (45.) berücksichtigt:

$$\lim_{\nu=\infty} \left(\frac{X_{j,\nu+1}^{(j)}}{X_{j,\nu}^{(j)}} - a_{j,j}^{(\nu)} \right) = 0. \tag{46.}$$

Damit ist die Existenz der $n-1$ Integrale $X_{i,\nu}^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots n-1)$ nachgewiesen. Was das Integral $X_{i,\nu}^{(n)}$ anbelangt, falls die Determinante des Systems (1.) für alle hinreichend großen ν von Null verschieden ist, so ist seine Existenz trivial für $n = 1$. Wir können daher wiederum den Schluß von $n-1$ auf n anwenden, wobei zu beachten ist, daß das System (37.) die Bedingungen von Satz 4 erfüllt, *auch bezüglich der Determinante.* Die Determinante von (37.) geht nämlich durch Ränderung sofort über in:

$$\frac{1}{X_{1,\nu+1}^{(1)}} \begin{vmatrix} X_{1,\nu+1}^{(1)} a_{1,2}^{(\nu)} \ldots a_{1,n}^{(\nu)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{n,\nu+1}^{(1)} a_{n,2}^{(\nu)} \ldots a_{n,n}^{(\nu)} \end{vmatrix},$$

was aber wegen $X_{i,\nu+1}^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{(\nu)} X_{k,\nu}^{(1)}$ gleich

$$\frac{X_{1,\nu}^{(1)}}{X_{1,\nu+1}^{(1)}} \begin{vmatrix} a_{1,1}^{(\nu)} a_{1,2}^{(\nu)} \ldots a_{1,n}^{(\nu)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}^{(\nu)} a_{n,2}^{(\nu)} \ldots a_{n,n}^{(\nu)} \end{vmatrix}$$

ist. Die Determinanten von (37.) und (1.) unterscheiden sich also nur um einen Faktor, der für genügend große ν von Null verschieden ist.

Hiernach gestaltet sich nun der Existenzbeweis für das Integral $X_{i,\nu}^{(n)}$ wörtlich ebenso wie oben für $X_{i,\nu}^{(j)}$.

Daß die $n-1$ bezw. n Integrale linear unabhängig sind, ergibt sich sofort aus dem Nichtverschwinden der Determinanten

$$(47.) \qquad \begin{vmatrix} X_{1,\nu}^{(1)} & X_{2,\nu}^{(1)} & \dots & X_{n-1,\nu}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{1,\nu}^{(n-1)} & X_{2,\nu}^{(n-1)} & \dots & X_{n-1,\nu}^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \text{bezw.} \quad \begin{vmatrix} X_{1,\nu}^{(1)} & X_{2,\nu}^{(1)} & \dots & X_{n,\nu}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{1,\nu}^{(n)} & X_{2,\nu}^{(n)} & \dots & X_{n,\nu}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

In der Tat ist z. B. die zweite Determinante gleich

$$X_{1,\nu}^{(1)} X_{2,\nu}^{(2)} \dots X_{n,\nu}^{(n)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{X_{2,\nu}^{(1)}}{X_{1,\nu}^{(1)}} & \dots & \frac{X_{n,\nu}^{(1)}}{X_{1,\nu}^{(1)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{X_{1,\nu}^{(n)}}{X_{n,\nu}^{(n)}} & \frac{X_{2,\nu}^{(n)}}{X_{n,\nu}^{(n)}} & \dots & 1 \end{vmatrix};$$

aber in dieser letzten Determinante sind die Elemente außerhalb der Hauptdiagonale für hinreichend große Werte von ν beliebig klein, also die Determinante gewiß von Null verschieden.

Endlich ist noch zu zeigen, daß, falls die Determinante des Systems (1.) für unendlich viele ν verschwindet, ein Integral $X_{i,\nu}^{(n)}$ nicht existiert. Würde es existieren, so wäre nach dem soeben Bewiesenen die zweite Determinante in (47.) selbst für beliebig große Werte von ν dauernd von Null verschieden. Diese Determinante ist aber, wenn man in ihr ν durch $\nu+1$ ersetzt, identisch gleich dem Produkt

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}^{(\nu)} & a_{1,2}^{(\nu)} & \dots & a_{1,n}^{(\nu)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}^{(\nu)} & a_{n,2}^{(\nu)} & \dots & a_{n,n}^{(\nu)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_{1,\nu}^{(1)} & X_{2,\nu}^{(1)} & \dots & X_{n,\nu}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{1,\nu}^{(n)} & X_{2,\nu}^{(n)} & \dots & X_{n,\nu}^{(n)} \end{vmatrix},$$

dessen erster Faktor nach Voraussetzung für unendlich viele Werte von ν verschwindet.

Überhaupt erkennt man hieraus, daß es jetzt gar keine n linear unabhängigen Integrale gibt. Wenn also der Satz 4 genau $n-1$ wirklich liefert, so ist das nur scheinbar eine Unvollkommenheit, in Wahrheit absolute Vollständigkeit.

§ 6.

Wir wollen die letzten Sätze etwas spezialisieren.

Satz 5. *Die Koeffizienten des linearen Differenzengleichungensystems*

$$X_{i,\nu+1} = \varrho_i X_{i,\nu} + \sum_{k=i+1}^{n} c_{i,k} X_{k,\nu} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}^{(\nu)} X_{k,\nu} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots n \\ \nu=0,1,2,\dots \end{pmatrix}$$

mögen folgenden Bedingungen genügen:

$$\lim_{\nu=\infty} \delta_{i,k}^{(\nu)} = 0, \qquad (i,k=1,2,\dots n)$$

$$|\varrho_1| > |\varrho_i|. \qquad (i=2,3,\dots n)$$

Dann gibt es ein Integral im weitern Sinne $X_{i,\nu}^{(1)}$, für welches

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_{i,\nu}^{(1)}}{X_{1,\nu}^{(1)}} = 0, \qquad (i=2,3,\dots n)$$

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_{1,\nu+1}^{(1)}}{X_{1,\nu}^{(1)}} = \varrho_1$$

ist. Jedes andre Integral (im weitern Sinne) hat dann die Form

$$X_{i,\nu} = K X_{i,\nu}^{(1)} + Z_{i,\nu}, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

wobei K eine Konstante ist und $Z_{i,\nu}$ ein Integral, für welches die Beziehung gilt:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{Z_{i,\nu}}{X_{1,\nu}^{(1)}} = 0. \qquad (i=1,2,\dots n)$$

In den Sätzen 2 und 3 ist bei Anwendung auf das obige System

$$\begin{aligned} a_{i,k}^{(\nu)} &= \delta_{i,k}^{(\nu)} \qquad \text{für } i > k, \\ a_{i,k}^{(\nu)} &= c_{i,k} + \delta_{i,k}^{(\nu)} \qquad \text{für } i < k, \\ a_{i,i}^{(\nu)} &= \varrho_i + \delta_{i,i}^{(\nu)} \end{aligned} \qquad (i=1,2,\dots n)$$

zu setzen. Wegen der Voraussetzungen über die Zahlen ϱ_i und $\delta_{i,k}^{(\nu)}$ gibt es dann eine positive Zahl c und eine positive Zahl $\vartheta < 1$ derart, daß von einem gewissen ν an

$$\begin{aligned} |a_{1,1}^{(\nu)}| &\geqq c, \\ |a_{i,i}^{(\nu)}| &\leqq \vartheta\, |a_{1,1}^{(\nu)}| \end{aligned} \qquad (i=2,3,\dots n)$$

ist. Da es sich um Integrale im weitern Sinne handelt, darf man annehmen, daß diese Ungleichungen schon von $\nu = 0$ an gelten. Dann geht der erste Teil von Satz 5 ohne weiteres aus Satz 2 hervor. Der zweite Teil ergibt sich aus den Sätzen 2 und 3, aus denen sogar die weitergehende Beziehung folgt:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{Z_{i,\nu}}{X_{1,\nu}^{(1)}} \left(\frac{1-\varepsilon}{\vartheta(1+\varepsilon)}\right)^{\nu} = 0$$

für beliebig kleine ε.

Satz 6. *Die Koeffizienten des linearen Differenzengleichungensystems*

$$X_{i,\nu+1} = \varrho_i X_{i,\nu} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}^{(\nu)} X_{k,\nu} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots n \\ \nu=0,1,2,\dots \end{pmatrix}$$

mögen den Bedingungen genügen:

$$\lim_{\nu=\infty} \delta_{i,k}^{(\nu)} = 0,$$

$$|\varrho_1| > |\varrho_2| > \cdots > |\varrho_n|.$$

Ist dann j eine der Zahlen $1, 2, \dots n-1$, so gibt es ein Integral (im weiteren Sinne) $X_{i,\nu}^{(j)}$, für welches

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_{i,\nu}^{(j)}}{X_{j,\nu}^{(j)}} = 0 \qquad (i \neq j),$$

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{X_{j,\nu+1}^{(j)}}{X_{j,\nu}^{(j)}} = \varrho_j$$

ist. Das gleiche gilt für $j = n$ dann und nur dann, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varrho_1 + \delta_{1,1}^{(\nu)} & \delta_{1,2}^{(\nu)} & \dots & \delta_{1,n}^{(\nu)} \\ \delta_{2,1}^{(\nu)} & \varrho_2 + \delta_{2,2}^{(\nu)} & \dots & \delta_{2,n}^{(\nu)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n,1}^{(\nu)} & \delta_{n,2}^{(\nu)} & \dots & \varrho_n + \delta_{n,n}^{(\nu)} \end{vmatrix}$$

für alle hinreichend großen ν von Null verschieden ist; also insbesondere, wenn $\varrho_n \neq 0$ ist.

Die $n-1$ bzw. n Integrale

$$X_{i,\nu}^{(1)},\ X_{i,\nu}^{(2)},\ \dots\ X_{i,\nu}^{(n-1)},\ (X_{i,\nu}^{(n)})$$

sind linear unabhängig.

In Satz 4 ist bei Anwendung auf das obige System

$$a_{i,k}^{(\nu)} = \delta_{i,k}^{(\nu)} \qquad \text{für } i \neq k,$$

$$a_{i,i}^{(\nu)} = \varrho_i + \delta_{i,i}^{(\nu)} \qquad (i=1, 2, \dots n)$$

zu setzen, so daß die Bedingungen jenes Satzes jedenfalls von einem gewissen ν an erfüllt sind. Daraus fließt Satz 6 dann ohne weiteres.

§ 7.

Wir wenden uns jetzt zu dem System

$$U_{i,\nu+1} = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k}^{(\nu)} U_{k,\nu}, \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots n \\ \nu=0, 1, 2, \dots \end{pmatrix} \tag{48.}$$

wobei die Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} p_{i,k}^{(\nu)} = p_{i,k} \tag{49.}$$

existieren sollen. Ferner setzen wir voraus, daß die Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n$ der „charakteristischen Gleichung"

$$\begin{vmatrix} p_{1,1} - \varrho & p_{1,2} & \dots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} - \varrho & \dots & p_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \dots & p_{n,n} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

ungleiche absolute Beträge haben, und zwar sei

$$|\varrho_1| > |\varrho_2| > \dots > |\varrho_n|.$$

Bezeichnet man die Matrizes

$$\begin{pmatrix} p_{1,1}^{(\nu)} & p_{1,2}^{(\nu)} & \cdots & p_{1,n}^{(\nu)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{n,1}^{(\nu)} & p_{n,2}^{(\nu)} & \cdots & p_{n,n}^{(\nu)} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

mit P_ν und P, so lassen sich die Gleichungen (48.), (49.) symbolisch folgendermaßen schreiben:

$$(50.) \qquad (U_{1,\nu+1}, U_{2,\nu+1}, \ldots U_{n,\nu+1}) = P_\nu (U_{1,\nu}, U_{2,\nu}, \ldots U_{n,\nu}),$$

$$(51.) \qquad \lim_{\nu=\infty} P_\nu = P.$$

Bekanntlich gibt es eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix},$$

für welche

$$B^{-1} P B = \begin{pmatrix} \varrho_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varrho_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \varrho_n \end{pmatrix}$$

ist. Dann wird offenbar

$$(52.) \qquad B^{-1} P_\nu B = \begin{pmatrix} \varrho_1 + \delta_{1,1}^{(\nu)} & \delta_{1,2}^{(\nu)} & \cdots & \delta_{1,n}^{(\nu)} \\ \delta_{2,1}^{(\nu)} & \varrho_2 + \delta_{2,2}^{(\nu)} & \cdots & \delta_{2,n}^{(\nu)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \delta_{n,1}^{(\nu)} & \delta_{n,2}^{(\nu)} & \cdots & \varrho_n + \delta_{n,n}^{(\nu)} \end{pmatrix},$$

wobei die Beziehung gilt:

$$(53.) \qquad \lim_{\nu=\infty} \delta_{i,k}^{(\nu)} = 0.$$

Setzt man nun

$$(54.) \qquad U_{i,\nu} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} X_{k,\nu}, \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

oder symbolisch

$$(U_{1,\nu}, U_{2,\nu}, \ldots U_{n,\nu}) = B(X_{1,\nu}, X_{2,\nu}, \ldots X_{n,\nu}),$$

so geht das System (48.) oder, was dasselbe ist, (50.) über in:

$$(X_{1,\nu+1}, X_{2,\nu+1}, \ldots X_{n,\nu+1}) = B^{-1} P_\nu B (X_{1,\nu}, X_{2,\nu}, \ldots X_{n,\nu}),$$

oder, unsymbolisch geschrieben, nach (52.):

$$X_{i,\nu+1} = \varrho_i X_{i,\nu} + \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}^{(\nu)} X_{k,\nu}. \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

Damit ist das System (48.) auf das des Satz 6 zurückgeführt, und das infinitäre Verhalten seiner Integrale kann sofort angegeben werden. Dem Integral $X_{i,\nu}^{(j)}$ des Satz 6 entspricht jetzt nach (54.) das Integral

$$(55.) \qquad U_{i,\nu}^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} X_{k,\nu}^{(j)},$$

und aus $\lim_{\nu=\infty} \frac{X_{i,\nu}^{(j)}}{X_{j,\nu}^{(j)}} = 0$ für $i \neq j$ folgt:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{U_{i,\nu}^{(j)}}{X_{j,\nu}^{(j)}} = b_{i,j}.$$

Daher

$$\lim_{\nu=\infty} (U_{1,\nu}^{(j)} : U_{2,\nu}^{(j)} : \cdots : U_{n,\nu}^{(j)}) = b_{1,j} : b_{2,j} : \cdots : b_{n,j}; \tag{56.}$$

dieses Verhältnis ist nicht sinnlos; vielmehr ist wenigstens eine der rechts stehenden Zahlen von Null verschieden (sonst würde die Determinante der Matrix B verschwinden, während doch die reziproke Matrix B^{-1} existiert). Ist etwa $b_{s,j} \neq 0$, so folgt:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{U_{s,\nu}^{(j)}}{X_{j,\nu}^{(j)}} = b_{s,j}, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{U_{s,\nu+1}^{(j)}}{X_{j,\nu+1}^{(j)}} = b_{s,j};$$

also durch Division:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{U_{s,\nu+1}^{(j)}}{U_{s,\nu}^{(j)}} = \varrho_j \qquad \text{für } b_{s,j} \neq 0, \tag{57.}$$

weil nach Satz 6 ja $\lim_{\nu=\infty} \frac{X_{s,\nu+1}^{(j)}}{X_{s,\nu}^{(j)}} = \varrho_j$ ist.

Die Gleichungen (56.) und (57.) geben das infinitäre Verhalten der Integrale des Systems (48.) mit wünschenswerter Vollständigkeit an.

Preisausschreiben S. M. des Königs von Schweden.

Einem von verschiedenen Seiten dargelegten Wunsche gemäß und anläßlich der obwaltenden Weltlage hat S. M. der König Gustaf V. beschlossen, daß die Einreichungsfrist für diejenigen Arbeiten, welche zur Konkurrenz um den von S. M. gestifteten mathematischen Preis angemeldet werden, vom 31. Oktober 1916 bis zum 31. Oktober 1917 hinausgeschoben wird.

G. Mittag-Leffler.

Transformationsgruppen und Variationsrechnung.

Von Herrn *Adolf Kneser* in Breslau.

Im vorletzten Kapitel ihrer Geometrie der Berührungstransformationen geben *Lie* und Herr *Scheffers* Sätze über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, die gewisse infinitesimale Transformationen gestatten und infolgedessen besondere Erleichterungen bei der Integration darbieten. Diese Sätze mögen vom höchsten Standpunkt der Gruppentheorie als Einzelheiten erscheinen, sind aber gerade deshalb fruchtbar. Sie gewinnen noch an Bedeutung, wenn man die betrachtete Differentialgleichung als *Jacobi-Hamilton*-sche Gleichung einer Aufgabe der Variationsrechnung auffaßt; den einzelnen an jener Stelle gekennzeichneten Arten von Gleichungen entsprechen dann Aufgaben der Variationsrechnung, die ebenfalls fesselnde Eigentümlichkeiten und Integrationserleichterungen darbieten.

I.

Sei eine beliebige partielle Differentialgleichung zwischen drei Veränderlichen in der Form

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{1.}$$

vorgelegt; dann setzen wir nach *Lie*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{p}{r}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{q}{r},$$

$$r f\left(x, y, z, -\frac{p}{r}, -\frac{q}{r}\right) = F(x, y, z, p, q, r)$$

und verstehen unter dem Elementarkegel der Gleichung (1.) oder

$$F(x, y, z, p, q, r) = 0 \tag{2.}$$

denjenigen Kegel, der von den Ebenen

$$p(\mathfrak{x}-x)+q(\mathfrak{y}-y)+r(\mathfrak{z}-z)=0$$

umhüllt wird, wenn x, y, z festgehalten werden, die Gleichung (2.) gilt und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ laufende Koordinaten bedeuten. Dieser Kegel entartet nur dann in eine einzelne Erzeugende, wenn die Gleichung (1.) auf die lineare Form gebracht werden kann, was hier ausgeschlossen werde. Beziehen sich die Differentiale dx, dy, dz auf den Fortgang längs einer Erzeugenden des Kegels, so gelten die Gleichungen

$$(3.) \qquad dx : dy : dz = \frac{\partial F}{\partial p} : \frac{\partial F}{\partial q} : \frac{\partial F}{\partial r},$$

aus denen man die Verhältnisse $p : q : r$ mittels der Gleichung (2.) eliminieren kann; dadurch ergebe sich

$$(4.) \qquad \Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

und Φ sei bezüglich der Differentiale homogen und von erster Dimension. Diese Gleichung bestimmt dann eine *Mayer*sche Aufgabe der Variationsrechnung, deren *Jacobi-Hamilton*sche die Gleichung (1.) oder auch die Gleichung (2.) ist, in der man

$$p = \frac{\partial W}{\partial x}, \; q = \frac{\partial W}{\partial y}, \; r = \frac{\partial W}{\partial z}$$

setzt. In der *Mayer*schen Aufgabe wird gefordert, y als Funktion von x so zu bestimmen, daß die durch die Gleichung (4.) und passende Anfangsbedingungen festgelegte Funktion z an einer bestimmten Stelle ein Extremum wird; die Rollen der Größen x, y, z können hierbei aber auch irgendwie vertauscht werden. Die Extremalen der *Mayer*schen Aufgabe sind, wie ich kürzlich bemerkt habe*), mit den Charakteristiken der gegebenen Differentialgleichung $F = 0$ identisch.

Wenn nun in der Gleichung $F = 0$ z. B. die Veränderliche z nicht vorkommt, so wird, wie die Gleichungen (3.) zeigen, auch der Elementarkegel und seine Gleichung $\Phi = 0$ von z unabhängig sein. Man kann dies in der Sprache der Transformationsgruppen folgendermaßen ausdrücken: Gestattet die gegebene Differentialgleichung eine Translation oder auch nur eine infinitesimale Verschiebung in der Richtung der z-Achse, so gilt dasselbe von den Elementarkegeln; die Funktion Φ ist also von z frei, die zugehörige *Mayer*sche Aufgabe entartet in eine *Lagrange*sche und wird durch eine Gleichung von der Form

$$dz = \varphi(x, y, dx, dy), \qquad z = \int \varphi(x, y, dx, dy)$$

*) Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung Bd. 24, 1915.

bestimmt, die man erhält, indem man die in Wahrheit von z freie Gleichung (4.) nach dz auflöst. Dabei ist auch die Funktion φ in den Differentialen homogen und von erster Dimension. Bei einer solchen Aufgabe versteht man unter Extremalen für gewöhnlich ebene Kurven, die die gleichwertigen *Euler*schen Differentialgleichungen

$$(5.) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} - d\,\frac{\partial \varphi}{\partial dx} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} - d\,\frac{\partial \varphi}{\partial dy} = 0$$

erfüllen. Trägt man auf einer dieser Kurven die längs ihrer mit beliebigem Anfangswert gebildete Größe z als dritte Koordinate auf, so erhält man eine räumliche Extremale, wie sie bei den *Mayer*schen Aufgaben betrachtet werden. Von ihnen gilt die erwähnte Beziehung zwischen Extremalen und Charakteristiken, und man kann den naheliegenden Satz aussprechen, daß jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen drei Veränderlichen, die eine Translation gestattet, als *Jacobi-Hamilton*sche Gleichung einer *Lagrange*schen Aufgabe in der Ebene angesehen werden kann; nur darf die Gleichung nicht auf die lineare Form zurückzuführen sein.

Dieses Ergebnis erscheint als Sonderfall eines inhaltsreicheren, wenn wir daran erinnern, daß nach *Lie* jede eingliedrige Gruppe von Punkttransformationen in die Gruppe der Translationen von bestimmter Richtung übergeführt werden kann, und zwar durch passende Wahl der Veränderlichen, die, wenn das bezeichnete Ziel erreicht ist, als die kanonischen Veränderlichen der Transformationsgruppe oder der sie erzeugenden infinitesimalen Transformation bezeichnet werden. Nun behält die Gleichung $F(x, y, z, p, q, r) = 0$ ihre Art, wenn man die Veränderlichen x, y, z durch drei andere, etwa u, v, w, ausdrückt und zugleich für p, q, r die Größen $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ einführt, die durch die Beziehung

$$p\,dx + q\,dy + r\,dz = \bar{p}\,du + \bar{q}\,dv + \bar{r}\,dw$$

bestimmt werden. Gestattet also die Gleichung $F = 0$ eine eingliedrige Transformationsgruppe, so kann sie durch passende Wahl der Veränderlichen in eine Gleichung derselben Art übergeführt werden, in der eine der Veränderlichen fehlt, also der oben betrachtete Fall vorliegt. Das für diesen erhaltene Ergebnis führt somit zu folgendem Lehrsatz, in dem einer ausdrücklich ausgeschlossenen Ausnahme gedacht wird.

Gestattet eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen drei Veränderlichen, die nicht auf die lineare Form gebracht werden kann, eine infinitesimale Punkttransformation, so kann sie durch passende Wahl der Veränder-

lichen in die Jacobi-Hamiltonsche Gleichung einer Lagrangeschen Aufgabe der Variationsrechnung im Gebiet von zwei Veränderlichen übergeführt werden.

Hiermit stimmt überein, was *Lie* über die Integration einer Differentialgleichung der bezeichneten Art sagt*), daß nämlich ihre Charakteristiken durch Integration zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung und eine Quadratur gefunden werden. Diese Kurven sind ja die räumlichen Extremalen der zugehörigen *Lagrange*schen Aufgabe, deren ebene Extremalen durch jede der beiden gleichwertigen *Euler*schen Differentialgleichungen (5.) bestimmt werden. Von diesen ebenen Kurven kommt man zu den räumlichen Extremalen, wie sie bei der *Mayer*schen Aufgabe betrachtet werden, indem man als dritte Koordinate die Größe z aufträgt, die durch eine Quadratur gefunden wird.

Sind die kanonischen Veränderlichen der Transformation unbekannt, so erfordert ihre Bestimmung weitere Integrationen, durch die erst die Form der Funktion φ bekannt wird; nach *Lie***) hat man ein System zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen zwischen drei Veränderlichen zu integrieren und eine Quadratur auszuführen.

II.

In der Theorie der Transformationsgruppen wird gezeigt, daß zwei vertauschbare infinitesimale Transformationen eines Raumes von beliebig vielen Dimensionen vertauschbare endliche Transformationen erzeugen, die bei passender Wahl der Veränderlichen in die Translationen nach zwei Koordinatenrichtungen übergehen, also im gewöhnlichen Raum etwa darin bestehen, daß y oder z um willkürliche Konstante vermehrt werden. Soll die Gleichung $F = 0$ bei diesen Transformationen ungeändert bleiben, so muß sie die Form

$$F(x, p, q, r) = 0,$$

die Gleichung des Elementarkegels also die Form

$$\Phi(x, dx, dy, dz) = 0 \tag{6.}$$

haben, da ja die Gleichungen (3.), die den Ausdruck Φ durch Elimination bestimmen, y und z nicht explizit enthalten. Löst man nach dz auf, so ergibt sich

$$dz = \varphi(x, dx, dy), \qquad z = \int \varphi(x, dx, dy)$$

und φ ist in den Differentialen homogen und von erster Dimension; die

*) *Lie-Scheffers* Berührungstransformationen S. 608.

**) *Lie-Scheffers* a. a. O. S. 604.

gegebene Gleichung $F = 0$ ist also die *Jacobi-Hamilton*sche einer *Lagrange*schen Aufgabe im Gebiet der Größen x, y, bei der jene Vereinfachung vorliegt, die bei den meisten zugänglichen Aufgaben der Variationsrechnung die Lösung durch Quadraturen möglich macht und darin besteht, daß die eine der Größen x und y unter dem Integralzeichen z nicht explizit vorkommt; die *Euler*sche Differentialgleichung des Integrals z ergibt

$$\frac{\partial \varphi(x, dx, dy)}{\partial dy} = \text{const.}, \tag{7.}$$

woraus man durch eine Quadratur die gesuchte Beziehung zwischen x und y, d. h. die Gleichung der ebenen Extremalen, erhält. Man kann auch sagen, daß die Aufgabe der Variationsrechnung auf zwei verschiedene Weisen als eine *Lagrange*sche erscheint, indem man die Gleichung (6.) auch nach dy auflösen kann, und erhält etwa

$$dy = \psi(x, dx, dz), \qquad y = \int \psi(x, dx, dz);$$

für die Extremalen gilt jetzt die Gleichung

$$\frac{\partial \psi(x, dx, dz)}{\partial dz} = \text{const.}$$

Jedenfalls ist folgender Lehrsatz bewiesen.

Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen drei Veränderlichen, die nicht auf die lineare Form gebracht werden kann und zwei vertauschbare infinitesimale Transformationen zuläßt, ist bei passender Wahl der Veränderlichen die Jacobi-Hamiltonsche Gleichung einer Lagrangeschen Aufgabe der Variationsrechnung im Gebiet zweier Veränderlichen, von denen die eine unter dem Integralzeichen nicht explizit vorkommt.

Nach *Lie**) kann nun die Gleichung $F = 0$ im vorliegenden Falle durch eine einzige Quadratur integriert werden. Damit hängt offenbar zusammen, daß die Gleichung (7.) durch eine Quadratur zu der Gleichung der ebenen Extremalen des Integrals z führt. Aber erst die räumlichen Extremalen sind die Charakteristiken der *Jacobi-Hamilton*schen Gleichung; um sie vollständig darzustellen, muß noch das Integral

$$z = \int \varphi(x, dx, dy)$$

längs einer ebenen Extremale ausgerechnet, also eine zweite Quadratur vollzogen werden. Der angeführte Satz von *Lie* zeigt aber, daß diese beiden

*) *Lie-Scheffers* a. a. O. S. 590.

Quadraturen durch eine einzige ersetzt werden können. In der Tat zeigt sich bei den einzelnen in der Variationsrechnung bearbeiteten Aufgaben, z. B. bei der Brachistochrone, der kleinsten Rotationsfläche, der Fläche kleinsten Widerstandes, daß das längs der Extremale gebildete Integral z ohne neue Quadratur ausgerechnet werden kann, wenn man die Extremalen kennt. Im allgemeinen ist jedoch die eine Quadratur, die zur Bestimmung der räumlichen Extremalen führt, eine andere als die durch die Gleichung (7.) gegebene; man hat aus den Gleichungen

$$\theta_x = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(x, dx, dy)}{\partial dx},$$
$$\theta_y = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(x, dx, dy)}{\partial dy}$$

das Verhältnis $dy : dx$ zu eliminieren, und erhalte etwa die Gleichung

(8.) $$G(x, \theta_x, \theta_y) = 0.$$

Dann findet man eine vollständige Lösung, indem man mit konstantem Wert a ansetzt

$$\theta = ay + \psi(x);$$

die Gleichung (8.) ergibt

$$G(x, \psi'(x), a) = 0$$

oder aufgelöst

$$\psi'(x) = \gamma(x, a), \qquad \theta = ay + \int^x \gamma(x, a)\, dx + b,$$

wobei auch b konstant ist. Die Charakteristiken der Gleichung (8.) werden dann durch die Gleichungen

(9.) $$z = \theta, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial a} = \text{const.}$$

dargestellt, aus deren zweiter zunächst folgt

(10.) $$\theta_{ax} dx + \theta_{ay} dy = 0.$$

Setzt man ferner

$$\frac{\partial G}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = Y = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \theta_x} = P, \quad \frac{\partial G}{\partial \theta_y} = Q, \quad \theta_x = p, \quad \theta_y = q$$

und differenziert die Gleichung (8.) nach a, x und y, so folgt

$$P\theta_{ax} + Q\theta_{ay} = 0,$$
$$X + P\theta_{xx} + Q\theta_{xy} = 0,$$
$$Y + P\theta_{xy} + Q\theta_{yy} = 0,$$

und hieraus, indem man die Gleichungen (9.) und (10.) heranzieht,

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}, \qquad dp=\theta_{xx}dx+\theta_{xy}dy=-X\cdot\frac{dx}{P},$$
$$dq=\theta_{yx}dx+\theta_{yy}dy=0,$$
$$dz=pdx+qdy=(pP+qQ)\frac{dx}{P},$$

so daß die Gleichungen der Charakteristiken in der üblichen Form

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{pP+Qq}=\frac{dp}{-X}=\frac{dq}{-Y}$$

aus den Gleichungen (9.) folgen.

Es ist hiernach klar, in welchem Sinne die Extremalen und das längs einer Extremalen gebildete Integral z durch eine einzige Quadratur hergestellt werden; das Integral $\frac{\partial\theta}{\partial a}$ wird, nachdem θ durch eine Quadratur erhalten ist, nicht als neue Quadratur gerechnet, und das Integral θ wird im allgemeinen nicht durch dieselbe Quadratur hergestellt, die durch die Gleichung (7.) auf die ebenen Extremalen führt.

Sind übrigens die beiden vorausgesetzten Transformationen in beliebigen, nicht kanonischen Veränderlichen gegeben, so können nach *Lie**) immer noch die gegebene Differentialgleichung und die ihr gleichwertige Aufgabe der Variationsrechnung durch eine Quadratur gelöst werden; unter Umständen sind aber weitere Integrationen nötig, um die *Mayer*sche Aufgabe in die Form einer *Lagrange*schen zu bringen.

III.

Seien die Bahnkurven zweier infinitesimaler Punkttransformationen durch die Gleichungssysteme

$$\frac{dx}{\xi_a}=\frac{dy}{\eta_a}=\frac{dz}{\zeta_a}=dt, \qquad a=1,2$$

bestimmt, so daß jede dieser Transformationen den unendlich kleinen Fortgang dem einen oder andern System gemäß bedeutet. Führt man in gewohnter Weise die Symbole der Transformationen ein, d. h. die auf eine willkürliche Funktion f ausgeübten Operationen

$$U_af=\xi_a\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_a\frac{\partial f}{\partial y}+\zeta_a\frac{\partial f}{\partial z},$$

so ist der mit einer willkürlichen Funktion f gebildete Ausdruck

---

*) *Lie-Scheffers* a. a. O. S. 620, 622.

$$Vf = U_1 U_2 f - U_2 U_1 f$$

dann und nur dann linear durch $U_1 f$ und $U_2 f$ mit konstanten Koeffizienten ausdrückbar, wenn die infinitesimalen Transformationen eine zweigliedrige Gruppe endlicher erzeugen. Verschwindet der Ausdruck Vf identisch, so sind die Transformationen $U_a f$ vertauschbar, und man erhält den Fall von Nr. II; liegt dieser nicht vor, so kann man nach *Lie**) solche kanonischen Veränderlichen einführen, daß die Symbole die Gestalten

$$\frac{\partial f}{\partial z}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} \tag{11.}$$

annehmen, die infinitesimalen Transformationen also in einer Translation und einer Ähnlichkeitstransformation vom Koordinatenanfangspunkt aus bestehen.

Läßt die Differentialgleichung $F = 0$ diese beiden Transformationen zu, so schließt man aus der ersten wie in Nr. I, daß die Gleichung des Elementarkegels oder auch der zugehörigen *Mayer*schen Aufgabe in der Form

$$dz = \varphi(x, y, dx, dy) \tag{12.}$$

geschrieben werden kann, wobei φ dieselbe Homogeneität hat wie in Nr. I. Da nun die Ähnlichkeitstransformation (11.) die Differentialgleichung, mithin auch die Gesamtheit ihrer Elementarkegel ungeändert läßt, so bleibt die Beziehung (12.) erhalten, wenn man in ihr jedes der vorkommenden fünf Elemente mit einem positiven Faktor α multipliziert. Daraus folgt

$$\alpha\varphi(x, y, dx, dy) = \varphi(\alpha x, \alpha y, \alpha dx, \alpha dy). \tag{13.}$$

Allgemein gilt ferner die Gleichung

$$\varphi(x, y, \alpha dx, \alpha dy) = \alpha\varphi(x, y, dx, dy),$$

und zwar auch wenn man dx und dy als beliebige von x und y unabhängige Verhältnisgrößen ansieht; man kann daher x und y durch αx und αy ersetzen und erhält so

$$\varphi(\alpha x, \alpha y, \alpha dx, \alpha dy) = \alpha\varphi(\alpha x, \alpha y, dx, dy),$$

also der Gleichung (13.) zufolge

$$\varphi(\alpha x, \alpha y, dx, dy) = \varphi(x, y, dx, dy).$$

Hier kann man das Wertsystem (x, y, dx, dy) festhalten und nun α beliebig wählen, z. B. den positiven der beiden Werte

$$\alpha = \pm\frac{1}{x}$$

nehmen; damit wird klar, daß die Funktion φ die Größen x und y nur in der Verbindung $y : x$ enthält, so daß man setzen kann

---

*) *Lie-Scheffers* a. a. O. S. 631, 634.

$$\varphi(x, y, dx, dy) = \Phi\left(\frac{y}{x}, dx, dy\right)$$

oder auch

$$\varphi(x, y, dx, dy) = f\left(\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}\right)dx.$$

Die zur gegebenen partiellen Differentialgleichung gehörige *Mayer*sche Aufgabe ist also diejenige *Lagrange*sche, bei der das Extremum des Integrals

$$z = \int f\left(\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}\right)dx$$

gesucht wird.

Die Extremalen dieses Integrals sind die Charakteristiken der Gleichung $F = 0$, die bei den geltenden Voraussetzungen nach *Lie**) durch die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen bestimmt werden können. Eben diese Operation löst also die *Lagrange*sche Aufgabe, und folgender Lehrsatz ist bewiesen.

Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen drei Veränderlichen, die nicht auf die lineare Form gebracht werden kann und zwei infinitesimale Transformationen zuläßt, die eine zweigliedrige Gruppe bestimmen, ist stets bei passender Wahl der Veränderlichen die Jacobi-Hamiltonsche Gleichung der Lagrangeschen Aufgabe, das Extremum eines Integrals von der Form

$$\int f\left(\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}\right)dx$$

zu finden. Die Extremalen dieses Integrals bestimmen sich durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen.

Sind freilich die kanonischen Veränderlichen noch nicht gefunden, so werden weitere ziemlich erhebliche Integrationsgeschäfte erfordert; aus den betreffenden Entwicklungen bei *Lie***) schließt man, daß, abgesehen von Quadraturen, zwei lineare Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Veränderlichen vollständig integriert werden müssen und noch von einer ebensolchen Gleichung ein Integral bestimmt werden muß.

IV.

Daß man die Extremalen des Integrals

$$z = \int f\left(\frac{y}{x}, y'\right)dx, \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

*) *Lie-Scheffers* a. a. O. S. 635.
**) *Lie-Scheffers* a. a. O. S. 631.

sowie es in Nr. III angegeben ist, bestimmen kann, bestätigt man in folgender Weise. Die *Euler*sche Differentialgleichung ist

$$\frac{\partial}{\partial y} f\left(\frac{y}{x}, y'\right) - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

oder, wenn man $y = ux$ setzt,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial u}\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

oder, da offenbar

$$\frac{du}{dx} = \frac{y'}{x} - \frac{u}{x} \tag{14.}$$

gesetzt werden kann,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' + \frac{1}{x}\left\{(y' - u)\frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}\right\} = 0$$

oder kurz

$$xy'' = \Psi\left(\frac{y}{x}, y'\right), \tag{15.}$$

wobei Ψ ein bekannter Ausdruck ist. Daß diese Differentialgleichung auf eine solche erster Ordnung zurückgeführt werden kann, ist bekannt; die Beziehung (14.) ergibt nämlich

$$xy'' = (y' - u)\frac{dy'}{du},$$

und die Gleichung (15.) kann geschrieben werden

$$\frac{dy'}{du} = \frac{\Psi(u, y')}{y' - u}.$$

Hat man aus dieser Differentialgleichung erster Ordnung y' als Funktion von u bestimmt, so daß etwa

$$y' = g(u),$$

so ergibt sich der Zusammenhang von x mit y durch Integration der homogenen Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

also durch eine Quadratur.

Die *Jacobi-Hamilton*sche Methode erspart diese Quadratur in gewissem Sinne. Sie geht aus von dem Ansatz

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \psi_x = f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \psi_y = \frac{\partial f}{\partial y'}, \end{aligned} \tag{16.}$$

aus dem sich, indem man y' eliminiert, eine Gleichung von der Form

$$G\left(\frac{y}{x}, \psi_x, \psi_y\right) = 0 \tag{17.}$$

ergibt. Diese verwandelt man nach der *Legendre*schen Methode, indem man

$$u = \psi_x, v = \psi_y$$

als unabhängige,

$$\theta(u, v) = \psi - x\psi_x - y\psi_y$$

als abhängige Veränderliche einführt, wobei die Beziehungen

$$d\theta = -x du - y dv, \qquad \theta_u = -x, \qquad \theta_v = -y$$

gelten; die Gleichung (17.) wird offenbar

$$G\left(\frac{\theta_v}{\theta_u}, u, v\right) = 0.$$

Ein Integral dieser Gleichung findet man, indem man das allgemeine Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$G\left(-\frac{du}{dv}, u, v\right) = 0$$

in der Form

$$\theta_0(u, v) = \text{const.}$$

ansetzt und unter $\theta(u, v)$ eine beliebige Funktion von θ_0 versteht, die eine Konstante c enthält. Bestimmt man weiter u und v als Funktionen von x und y aus den Gleichungen

$$x = -\theta_u, y = -\theta_v,$$

so ist

$$\psi(x, y) = \theta(u, v) + xu + yv + c_1$$

in x und y ausgedrückt eine mit den willkürlichen Konstanten c und c_1 behaftete Lösung der *Jacobi-Hamilton*schen Gleichung (17.), und die ebenen Extremalen des Integrals z sind durch die Gleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial c} = \text{const.} \tag{18.}$$

dargestellt. Aber erst die dreidimensionalen Extremalen der Aufgabe sind völlig identisch mit den Charakteristiken der Gleichung (17.) im Gebiet der Größen x, y, ψ; um sie zu finden, bedarf es noch der Quadratur

$$z = \int f\left(\frac{y}{x}, y'\right) dx,$$

in der für y und y' die aus der Gleichung (18.) folgenden Werte einzusetzen sind. Diese Quadratur ist aber durch die Gleichung

$$z = \psi(x, y)$$

schon ausgeführt, da die Gleichungen (16.) ergeben

$$\frac{d\psi}{dx} = \psi_x + \psi_y y' = f = \frac{dz}{dx}.$$

Die Integrationserleichterungen, die hiernach das Integral

$$\int f\left(\frac{y}{x}, y'\right) dx, \qquad y' = \frac{dy}{dx} \tag{19.}$$

bei der *Lagrange*schen Aufgabe darbietet, übertragen sich natürlich auf Formen, in die man dieses Integral mit elementaren Mitteln überführen kann. Ersetzt man z. B. x durch e^{ax}, y durch ye^{ax} und versteht unter a eine Konstante, so kommt man auf das Integral

$$\int e^{ax} f(y, y')\, dx; \tag{20.}$$

ersetzt man $\frac{y}{x}$ durch y, so erhält man die Gestalt

$$\int f(y, xy')\, dx.$$

Integrale von der Form (20.) erscheinen bei einer wichtigen Gattung mechanischer Aufgaben, die Herr *Staude**) entdeckt, sodann auch Herr *Stäckel***) behandelt und verallgemeinert hat. Besitzt ein mechanisches System zwei Grade der Bewegungsfreiheit, haben die Kräfte ein von der Zeit unabhängiges Potential und gestattet das System eine von der Konstanten der lebendigen Kraft unabhängige infinitesimale Transformation, so ergibt das Prinzip der kleinsten Aktion bei passender Wahl der Veränderlichen u, v eine Gleichung von folgender Form, in der $H(u)$ das Potential, a und h Konstante bedeuten:

$$\delta \int e^{av + \varphi(u)} \sqrt{H(u) + h} \sqrt{du^2 + dv^2} = 0.$$

Die Bahnkurven im Gebiet der Veränderlichen u, v bestimmen sich, wie Herr *Staude* hervorhebt, durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung.

Ein anderes hierher gehöriges Beispiel bieten die Spiralflächen, deren geodätische Linien wie die ganze Fläche Spiraltransformationen gestatten, d. h. eine Translation verbunden mit einer Ähnlichkeitstransformation, also eine Verbindung der in Nr. IV behandelten Transformationen. Das Bogenelement dieser Flächen hat nach *Lie****) die Form

*) Berichte der sächs. Ges. 1892 S. 429.

**) Ebenda 1893 S. 331.

***) *Lie-Scheffers*, Differentialgleichungen S. 370.

$$ds = \sqrt{e^{ax}\,\omega(x+y)\,dx\,dy},$$

oder wenn man

$$u = \frac{x+y}{2}, \qquad v = \frac{x-y}{2i}$$

setzt,

$$ds = \sqrt{\omega(2u)\,e^{a(u+iv)}(du^2+dv^2)};$$

das Integral

$$\int ds$$

hat also wiederum die Form (20.), und *Lie* hat bemerkt, daß die geodätischen Linien dieser Fläche durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung bestimmt werden können.

Endlich findet schon *Euler**), daß die Aufgabe

$$\delta\int xy\sqrt{dx^2+dy^2} = 0$$

die in Rede stehende Integrationserleichterung zuläßt. Man kann die Aufgabe folgendermaßen deuten: Durch zwei horizontale Kreise, deren Mittelpunkte auf derselben Vertikalen liegen, soll eine Rotationsfläche gelegt werden, deren Achse jene Vertikale ist und deren Schwerpunkt bei gegebenem Areal möglichst tief liegt. *Euler*s Ergebnis läßt sich dahin verallgemeinern, *daß die Aufgabe*

$$\delta\int f(x, y, y')\,dx = 0$$

immer dann auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt werden kann, wenn die Funktion $f(x, y, y')$ bezüglich der Größen x und y homogen ist. Hat sie nämlich die Dimension n, so kommt man auf das Integral (19.) zurück, indem man x^{n+1} und y^{n+1} als neue Veränderliche an Stelle von x und y einführt.

---

*) Methodus inveniendi Kap. II Nr. 37.

Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung.

III. Der allgemeine Fundamentalsatz der konformen Abbildung nebst einer Anwendung auf die konforme Abbildung der Oberfläche einer körperlichen Ecke.

Von Herrn *Paul Koebe* in Jena.

In den Abhandlungen I und II dieser Serie*) haben wir uns mit der konformen Abbildung gewisser, noch spezieller einfach zusammenhängender Bereiche befaßt. Wir erledigten in I. das Problem der konformen Abbildung einerseits des allgemeinsten schlichten, einfach zusammenhängenden Bereichs auf das Innere einer Kreisfläche, weiter dann in II. das Problem der konformen Abbildung gewisser unendlich-vielblättriger, einfach zusammenhängender Bereiche, die als *Riemann*sche Flächen über der Ebene ausgebreitet sind und die wir durch die Eigenschaft ihres regulären Aufbaus über der gewöhnlichen Ebene als „reguläre *Riemann*sche Flächen" charakterisieren können. Als „reguläre *Riemann*sche Flächen" bezeichnen wir alle endlich- oder unendlich-vielblättrigen *Riemann*schen Flächen, welche die Eigenschaft besitzen, in allen ihren Blättern an derselben Stelle jeweils dieselbe Beschaffenheit darzubieten, und zwar nicht nur am einzelnen Orte, sondern auch in bezug auf alle bei der Fortbewegung auf der Fläche sich darbietenden Zusammenhangsvorkommnisse. Eine solche *Riemann*sche Fläche

*) Abhandlung I der Serie führt den Untertitel „Die Kreisabbildung des allgemeinsten einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs und die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung", erschienen 1915 in diesem Journal Bd. 145, S. 177—223. Abhandlung II führt den Untertitel „Die Fundamentalabbildung beliebiger mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche nebst einer Anwendung auf die Bestimmung algebraischer Funktionen zu gegebener *Riemann*scher Fläche"; Acta mathematica. Bd. 40, S. 251—290 (1916). Zum Verständnis der vorliegenden Abhandlung III ist die Lektüre der Abhandlung II nicht erforderlich. Die nächste Abhandlung der Serie soll in den Acta math. erscheinen.

wird, wenn wir die Gesamtheit ihrer inneren Punkte ins Auge fassen, mit diesen Punkten einen gewissen endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängenden schlichten Bereich B der Ebene überdecken; die zu bestimmende Abbildungsfunktion liefert eben die *Fundamentalabbildung* des Bereichs B ohne oder mit einer bestimmten relativen Verzweigung.

In der vorliegenden Abhandlung legen wir nun nicht nur die schlechthin allgemeinsten einfach zusammenhängenden *Riemann*schen Flächen zugrunde, um ihre Abbildung auf eine schlichte Kreisfläche zu bestimmen, sondern wir legen, was für die spätere Anwendung auf die konforme Abbildung der Oberfläche der körperlichen Ecke wesentlich ist, sogleich den allgemeinen Begriff der *Riemannschen Mannigfaltigkeit* zugrunde, und zwar definieren wir denselben, im Gegensatz zu früher, hier *genetisch* unter Einführung eines, allgemein zu reden, unendlichen Aggregates von analytisch begrenzten schlichten Dreiecksflächen, die durch analytische Bezugstransformationen der begrenzenden Seiten zu einem idealen Ganzen verbunden erscheinen, nämlich einer *Riemann*schen Mannigfaltigkeit M. Unser *Fundamentalsatz der konformen Abbildung* besagt dann die Möglichkeit der konformen Abbildung der allgemeinsten einfach zusammenhängenden *Riemann*schen Mannigfaltigkeit entweder auf die *volle Ebene* (Fall des geschlossenen einfach zusammenhängenden Bereichs) oder auf die *punktierte Ebene* (Fall A) oder, und zwar im allgemeinen Falle, auf eine *endliche Kreisfläche* (Fall B)*).

Die *Riemann*sche Mannigfaltigkeit M wird zum Beweise des Fundamentalsatzes mittels eines Aggregates idealer Kreisscheiben ausgeschöpft. Die Abbildung der Näherungsbereiche auf eine Kreisfläche erfordert die Durchführung der „Kreisscheibenadjunktion", was nach *Schwarz* mittels des alternierenden Verfahrens geschehen kann, hier aber nach einem Gedanken von Herrn *Carathéodory* behandelt wird, unter Zugrundelegung der Hauptresultate unserer Abhandlung I, nämlich des Fundamentalsatzes für schlichte einfach zusammenhängende Bereiche und der Tatsache der analytischen Ränderzuordnung im Falle analytischer Begrenzung.

Das auf diese Weise zur Entwickelung kommende Beweisverfahren

---

*) Der Fall gewöhnlicher, auch mehrblättriger berandeter *Riemann*scher Flächen und der geschlossener Flächen wurde ursprünglich von *Riemann* und *Schwarz* behandelt, der allgemeine Satz zuerst und gleichzeitig 1907 durch *Poincaré* (Acta math. Bd. 31) und den Verfasser (Gött. Nachr. 1907, erste und zweite Mitteilung).

bewahrt überall den Charakter rein funktionentheoretischer Methodik, und zwar durchgängig auf rein potenzreihentheoretischer Grundlage.

Nach Durchführung der Kreisscheibenadjunktion wird zunächst der geschlossene einfach zusammenhängende Bereich einer gesonderten Behandlung unterzogen. Danach wird für den allgemeinsten offenen Bereich, der als Grenze von Näherungsbereichen erscheint, die Abbildungsaufgabe behandelt, wobei sich unsere oben erwähnte Alternative (Fall A und B) ergibt. Die Beweisführung, welche wir hier geben, ist im Grunde eine modifizierte Darstellung unseres ersten, ursprünglich 1907 (Gött. Nachr.) gegebenen Beweises, wobei es jetzt darauf ankommt, überall die Vorstellungen der Potentialtheorie, sowie auch den Integralbegriff zu vermeiden, sowie methodische Einheitlichkeit in der Behandlung der Fälle A und B zu erzielen. Die Hilfssätze, von welchen wir dabei Gebrauch machen, werden auf das *Schwarzsche Lemma* zurückgeführt.

Zum Schlusse machen wir eine Anwendung des bewiesenen Fundamentalsatzes zur konformen Abbildung der Oberfläche einer von endlich vielen regulären analytischen Flächenstücken gebildeten *körperlichen Ecke.* Für dieses 1870 von *Schwarz**) erwähnte Problem nebst einem verwandten ebenen Problem (s. unten § 10) haben wir zuerst 1908 in den Gött. Nachr. einen auf dem Fundamentalsatze basierten Beweisgedanken skizziert**).

Die Oberfläche der körperlichen Ecke denken wir uns längs einer Kante aufgeschnitten und das so gewonnene Flächenstück eineindeutig konform auf einen *eckenförmigen ebenen Bereich Φ mit regulärer analytischer Ränderzuordnung* abgebildet (s. Fig. 8 unten S. 97). Alsdann handelt es sich weiter um die konforme Abbildung des Bereichs Φ auf die schlichte Umgebung eines Punktes, wobei zugeordneten Randpunkten des Bereichs Φ in der Abbildung identische Punkte entsprechen sollen.

---

*) *H. A. Schwarz:* „Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen." Berliner Monatsberichte, 1870, S. 767 ff. = Ges. Abh. Bd. II, S. 144 ff., insbesondere S. 161.

**) *P. Koebe:* „Konforme Abbildung der Oberfläche einer von endlich vielen regulären analytischen Flächenstücken gebildeten körperlichen Ecke auf die schlichte ebene Fläche eines Kreises." Gött. Nachr., 1908, S. 359—360. Es sei hier auch hingewiesen auf die Abhandlung von *R. König:* „Konforme Abbildung der Oberfläche einer räumlichen Ecke." Math. Ann. Bd. 71 (1912), S. 184—205.

Die Anwendung des Fundamentalsatzes ergibt zunächst die Möglichkeit, den Bereich Φ exkl. des Eckpunktes und damit die Oberfläche der körperlichen Ecke exkl. deren Eckpunkt auf eine Kreisringfläche R abzubilden. Nachdem dies geschehen ist, wird durch eine besondere Untersuchung dargetan, daß der dem Eckpunkte des Bereichs Φ bezw. der körperlichen Ecke entsprechende begrenzende Kreis des Ringes sich auf einen Punkt reduzieren muß. Damit ist die Stetigkeit der Abbildung im Eckpunkte nachgewiesen.

§ 1. Begriff der *Riemann*schen Mannigfaltigkeit.

Während der allgemeine Begriff der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit in der Analysis situs auf den Begriff der rein topologischen Abbildung basiert wird, ist für den hier zu definierenden Begriff der allgemeinen „*Riemannschen Mannigfaltigkeit*“ die Einführung einer Spezialisierung der zugrunde liegenden Abbildungsvorstellung charakteristisch, nämlich die Spezialisierung auf die konforme, d. i. winkeltreue Abbildung. Es wird jetzt angenommen, daß für die betreffende Mannigfaltigkeit M überall ein Prinzip der Winkelbestimmung gegeben sei, welches so beschaffen ist, daß eine Umgebung jeder einzelnen Stelle von M eine eineindeutige konforme Abbildung auf die Fläche eines schlichten Kreises gestatten soll, womit dann sofort der Begriff von komplexen und analytischen Funktionen auf der Mannigfaltigkeit gegeben ist, das ist der Begriff von Funktionen, welche jederzeit den Charakter gewöhnlicher Funktionen komplexen Arguments erhalten, wenn man sie gemäß der für den einzelnen betrachteten Ort bestehenden konformen Abbildung auf die gewöhnliche Ebene der komplexen Variablen überpflanzt denkt, ferner der Begriff der regulären analytischen Linie in der Mannigfaltigkeit, welcher Begriff nach demselben Prinzip zu erklären ist.

Dem Begriff der allgemeinen *Riemann*schen Mannigfaltigkeit M geben wir nun gewissermaßen genetisch folgende zweckmäßige Form. Eine *Riemann*sche Mannigfaltigkeit entsteht durch die Zusammenfassung von endlich oder unendlich vielen, von regulären analytischen Linien begrenzten Dreiecksflächen der Ebene der komplexen Variablen, deren Seiten paarweise, und zwar stets mit verkehrtem Durchlaufungssinne, wobei auch nur Seiten *verschiedener* Dreiecke zur Paarung gelangen (vergleiche die Figur 1), durch reguläre analytische

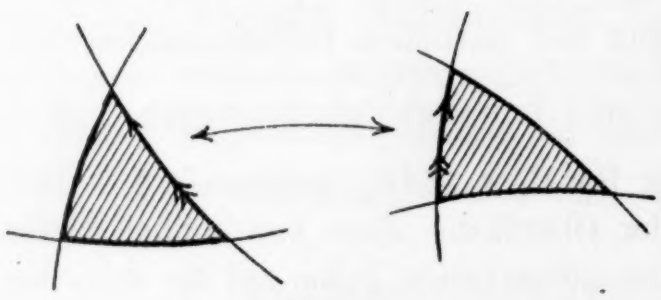

Fig. 1.

Abbildung auf einander bezogen sind so, daß keine Seite frei bleibt. Diese Zuordnung soll ferner der Bedingung („*Eckpunktsbedingung*") genügen, daß vermöge derselben jeder Eckpunkt eines Dreiecks mit nur endlich vielen anderen Eckpunkten anderer Dreiecke äquivalent ist, so zwar, daß es möglich sein soll, durch ein System analytischer Transformationen den betreffenden *Eckenzyklus* um einen Punkt der Ebene herum zur vollen schlichten Umgebung desselben zu vereinigen, wobei korrespondierende Randpunkte zur Deckung gelangen (vergl. Figur 2). Der betreffende Eckpunkt erscheint dadurch in natürlicher Weise als ein innerer Punkt der Mannigfaltigkeit. Bezüglich der einzelnen Seiten der Dreiecke sei noch bemerkt, daß dieselben von Anfang bis zu Ende als reguläre analytische Stücke zu denken sind, wobei Anfangs- und Endpunkt auch ausgenommen sein können.

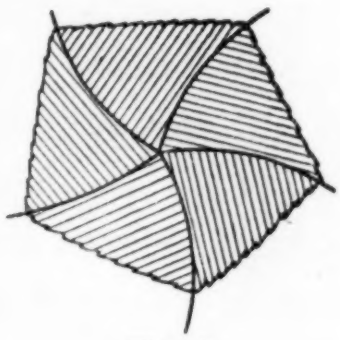

Fig. 2.

Unmittelbar mit vorstehender Begriffsbestimmung ist offenbar die Möglichkeit gegeben, eine volle Umgebung *jedes* inneren Punktes der Mannigfaltigkeit konform auf die schlichte Umgebung eines Punktes in der Ebene zu übertragen, und damit der Begriff von innerhalb der Mannigfaltigkeit erklärten analytischen Funktionen und analytischen Linien.

Es ist nun möglich, jede *Riemann*sche Mannigfaltigkeit, wie wir sie soeben erklärt haben, gemäß einem „*Prinzip der Kreisscheibenüberdeckung*" auszuschöpfen. Damit ist folgendes gemeint. Es ist möglich, eine endliche (im Falle einer geschlossenen Mannigfaltigkeit) oder, und zwar im allgemeinen Falle, unendliche Folge von durchaus regulären geschlossenen analytischen Linien $C_1, C_2, C_3, \ldots$ in der M zu bestimmen, deren jede einzelne C_n ein einfach zusammenhängendes Stück K_n der M begrenzt, welches durch eine in der Mannigfaltigkeit reguläre analytische Funktion auf die schlichte Fläche eines Kreises der Ebene der komplexen Variablen z konform abgebildet werden kann, eine Abbildung, die sich in regulärer Weise auch noch auf eine gewisse Nachbarschaft des erwähnten Flächenstückes K_n rings um dasselbe erstrecken und von dieser Nachbarschaft ebenfalls noch ein schlichtes Bild in der z-Ebene entwerfen soll. Die genannten einfach zusammenhängenden Flächen $K_1, K_2, K_3, \ldots$ sollen so gewählt sein, daß immer das von den Flächen $K_1, \ldots, K_n$ erfüllte Teilgebiet τ in M mit K_{n+1} in der Regel ein zweieckartiges, einfach zusammenhängendes Stück gemeinschaft-

lich hat, dessen Begrenzung von einem einzigen Stück der Begrenzung von τ einerseits und einem einzigen Stück von C_{n+1} andererseits gebildet wird. Diese beiden Stücke sollen an den beiden Stellen ihres Zusammentreffens, d. i. an den Stellen, wo die Begrenzungen von τ und K_{n+1} sich durchkreuzen, von 0 und π verschiedene Winkel bilden. Im besonderen kann (bei einer geschlossenen Mannigfaltigkeit), das gemeinschaftliche Stück auch zweifach zusammenhängend sein, was jedoch nur für die letzte, den Abschluß bewirkende Kreisscheibe eintreten soll. Vergl. hierzu die Figuren 3 und 4, in welchen das um eine Kreisscheibe zu erweiternde Gebiet schraffiert angedeutet ist. Die Figuren zeigen uns die tatsächlichen Verhältnisse nicht direkt, sondern vielmehr in der erwähnten Abbildung der betreffenden zu adjungierenden Fläche K auf eine schlichte Kreisscheibe.

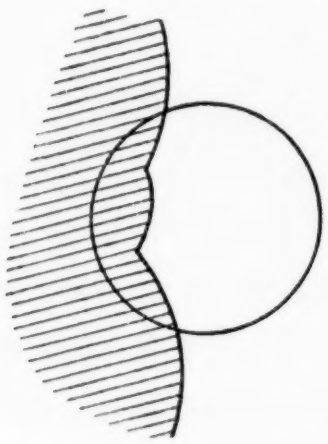

Fig. 3.

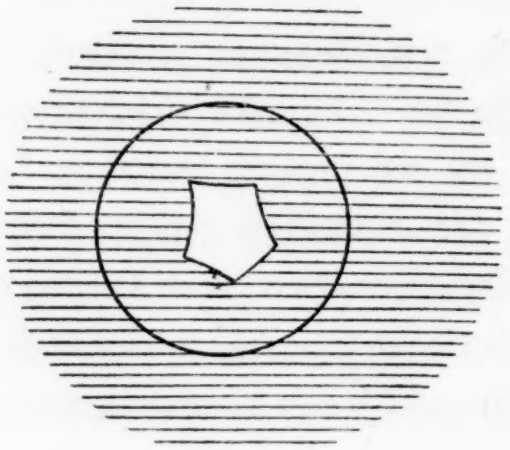

Fig. 4.

Um eine Kreisscheibenüberdeckung für die vorgelegte Mannigfaltigkeit M zu bestimmen, denken wir uns die zugrunde liegenden, analytisch begrenzten Dreiecke der M ihrerseits in einer Reihe geordnet und nennen sie $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$, wobei nur darauf zu achten ist, daß Δ_{n+1} an das von $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ gebildete Stück der Mannigfaltigkeit M jedesmal wirklich anschließt mit mindestens einer Seite. Nachdem eine solche Ordnung der Dreiecke hergestellt ist, beginnen wir mit dem Dreieck Δ_1. Wir schließen zunächst die Ecken des Dreiecks Δ_1 aus, indem wir sie durch kleine Kurvenstücke zur Abtrennung bringen. Den übrig bleibenden Teil δ_1 von Δ_1 können wir nun ohne weiteres dem Prinzip der Kreisscheibenüberdeckung unterwerfen, wobei endlich viele Kreisscheiben benötigt werden, die hier in der Ebene des Dreiecks als wirkliche Kreisflächen erscheinen. Es genügen endlich viele solche Kreisscheiben, um den Flächenteil δ_1 vollständig auszufüllen in dem erwähnten Sinne, so zwar, daß die ganze Begrenzung von δ_1 vollständig von Kreisflächen bedeckt erscheint, deren Gesamtumgrenzung über die Begrenzung von δ_1 allenthalben hinausragt, jedoch, — und darauf ist besonders zu achten—, nur so weit, daß das hierdurch außerhalb δ_1 bedeckte Gebiet G

als Gebiet der Mannigfaltigkeit M gelten kann, vermöge der mit den Randsubstitutionen gegebenen regulären analytischen Abbildung insbesondere der außerhalb Δ_1 fallenden Teile von G auf entsprechende Teile innerhalb der mit Δ_1 benachbarten Dreiecke der Mannigfaltigkeit. Dieser Nebenbedingung kann in der Tat genügt werden, indem man die zur Verwendung gelangenden Kreisflächen nur hinreichend klein wählt.

Nunmehr sind auch noch die Ecken des Dreiecks Δ_1 dem Prinzip der Kreisscheibenüberdeckung zu unterwerfen. Zu dem Zwecke wird die für jede einzelne Ecke nach Voraussetzung vorhandene Hilfsabbildung auf einen *Eckenstern* (Fig. 2) vorgenommen und in dieser Abbildung, in welcher ein gewisser Teil der früher bei Δ_1 konstruierten Kreislinien sich jetzt als analytisches Liniensystem repräsentieren wird, die Kreisscheibenüberdeckung des Eckensterns vollzogen. Hiernach wird der Übergang zu Δ_2 gemacht, indem zunächst die bei der Behandlung von Δ_1 bereits konstruierten Linienzüge, vermöge der den Zusammenhang zwischen Δ_1 und Δ_2 vermittelnden analytischen Transformationen, übertragen werden und sodann weitere, Δ_2 und dessen neu hinzugekommene Eckpunkte zur Bedeckung bringende Kreisscheiben hinzugefügt werden, welch letztere Operation genau nach dem Muster der Behandlung von Δ_1 vorzunehmen ist. Man übersieht ohne weiteres, wie der Prozeß der Kreisscheibenüberdeckung nun weiter auf die Dreiecke $\Delta_3, \Delta_4, \ldots$ fortzusetzen ist. Gleichfalls erkennt man ohne weiteres, daß die Einführung einer Kreisscheibe mit zweifach zusammenhängendem Anschlußteil an das früher bereits bedeckte Gebiet in der Tat nur dann erforderlich ist, wenn eine geschlossene Mannigfaltigkeit vorliegt, d. i. wenn die vorgelegte Mannigfaltigkeit M aus endlich vielen Dreiecken gebildet ist.

§ 2. Formulierung des Fundamentalsatzes und erste Bemerkungen zu seinem Beweise.

Wir gehen nunmehr über zum Fundamentalsatze der konformen Abbildung. Derselbe lautet:

Fundamentalsatz der konformen Abbildung: 1. (*Existenzsatz*). Jede einfach zusammenhängende *Riemann*sche Fläche oder *Riemann*sche Mannigfaltigkeit läßt sich eineindeutig konform abbilden auf einen schlichten, über der Ebene ausgebreitet zu denkenden *Normalbereich*, und zwar im Falle einer geschlossenen gegebenen Mannigfaltigkeit auf die *Vollebene* (d. i.

Ebene inkl. des unendlich fernen Punktes), im Falle einer ungeschlossenen gegebenen Mannigfaltigkeit (allgemeiner Fall) entweder auf die *punktierte Ebene* (d. i. Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes, an dessen Stelle auch ein endlicher Punkt treten kann) oder, und zwar im allgemeinen, auf eine *endliche Kreisfläche*, an deren Stelle auch eine Halbebene treten kann.

2. (*Unitätssatz*): Die analytische Funktion, welche die gemeinte konforme Abbildung leistet, ist abgesehen von einer linearen Transformation völlig bestimmt. —

Auf den Beweis des Unitätssatzes gehen wir hier nicht weiter ein. Wir verweisen in dieser Beziehung auf unsere Abhandlung I der Serie (Journal für Mathematik Bd. 145, insbesondere § 1). Den Beweis des Existenzsatzes jedoch wollen wir hier in einer Form erbringen, welche nach unseren früheren Veröffentlichungen noch ein besonderes Interesse darbietet durch den rein potenzreihentheoretisch bestimmten Charakter der Beweisführung. Die von uns früher gegebenen Beweise ließen die hier liegende Forderung noch wesentlich außeracht. Lag ihnen doch zugrunde der Beweis für die Lösbarkeit der Randwertaufgabe der Potentialtheorie für berandete mehrblättrige *Riemann*sche Flächenstücke, wie ihn *Schwarz* und *C. Neumann* gegeben haben. Aber auch die Grenzübergänge selbst, welche von jenen *Schwarz-Neumann*schen Resultaten zum allgemeinen Fundamentalsatze hinführten, genügten in der dargebotenen Form nicht der hier aufgestellten prinzipiellen Forderung.

Zur Erreichung des gewünschten Zieles nehmen wir unseren Ausgangspunkt bei dem in der erwähnten Abhandlung I (§§ 2—5) sowie auch in II (§ 2) hergeleiteten Resultate, daß jeder schlichte einfach zusammenhängende, über der z-Ebene ausgebreitet gedachte Bereich, welcher nicht nur von einem einzigen Punkte begrenzt wird, eineindeutig konform auf das Innere des Einheitskreises abgebildet werden kann. Wir haben in derselben Arbeit I noch das weitere, ursprünglich von *Schwarz* gefundene Resultat, und zwar auch ohne Zuhilfenahme des Integralbegriffs, erhalten, daß die erwähnte Abbildung, welche zunächst nur für die eigentlich inneren Punkte des Bereiches gemeint ist, sich regulär analytisch über ein analytisches Begrenzungsstück hinaus fortsetzen läßt und diesem Stück ein Stück der Peripherie des Einheitskreises in regulärer Weise entsprechen läßt.

Es sei B der abzubildende, in der Form einer *Riemann*schen Mannigfaltigkeit gegebene einfach zusammenhängende Bereich. Gemäß den oben

gegebenen Darlegungen erscheint derselbe, je nachdem er offen oder geschlossen ist, in endlich oder unendlich viele Parzellen zerlegt und dadurch als Grenze einfach zusammenhängender Näherungsbereiche B_n dargestellt, deren jeder folgende aus dem vorhergehenden durch Adjunktion einer Kreisscheibe gemäß Figur 3 entsteht. Im Falle eines geschlossenen Bereichs B wird zuletzt eine Adjunktion gemäß Figur 4 vorgenommen. Wir haben demgemäß drei Aufgaben zu erledigen.

1) Die konforme Abbildung eines *offenen* Bereichs B, der aus einem andern, als abbildbar erkannten Bereich B' gemäß dem Prinzip der Figur 3 durch Adjunktion einer Kreisscheibe entsteht:

2) Die konforme Abbildung eines *geschlossenen* Bereichs B der gemäß dem Prinzip der Figur 4 aus einem abbildbaren offenen Bereich B' durch Adjunktion einer Kreisscheibe entsteht.

3) Die konforme Abbildung eines *offenen* Bereichs B, der als Grenze $\lim_{n=\infty} B_n$ von Näherungsbereichen B_n entsteht, für deren jeden einzelnen die Abbildung auf die Fläche eines schlichten Kreises feststeht.

§ 3. Durchführung der Kreisscheiben-Adjunktion. Abbildung gewöhnlicher endlich-vielblättriger Bereiche.

Das Problem 1 gestattet eine sehr einfache, dabei durchaus funktionentheoretische und zwar rein potenzreihentheoretische Lösung, bei welcher die oben angeführten Resultate unserer Abhandlung I vorausgesetzt werden, welche von uns ebenfalls vollständig auf potenzreihen-theoretischer Grundlage entwickelt worden sind. Die hier von uns vorzubringende, dem gegenwärtigen Zusammenhange sich bequem einfügende Methode der Kreisscheibenadjunktion stammt wesentlich von Herrn *Carathéodory* (*Schwarz*-Festschrift, Verlag J. Springer, 1914, vgl. insbesondere §§ 13 u. 14)*).

Der Bereich B' erscheint in Figur 3 schraffiert. Wir haben uns denselben nicht vollständig in der Ebene liegend vorzustellen, sondern vielmehr der oben entwickelten Auffassung entsprechend als ein Aggregat von ideal in Verbindung stehenden Kreisscheiben, von welchen nur ein ge-

*) Einen ganz andern Gedanken skizziere ich selbst in meiner Note „Zur Theorie der konformen Abbildung und Uniformisierung“ in den Leipziger Berichten, 1914, S. 67—75.

wisser, der neu zu adjungierenden Kreisscheibe K der Figur 3 benachbarter Teil neben dieser Kreisscheibe in Erscheinung tritt. Das den beiden Bereichen B' und K gemeinschaftliche, in der Figur 3 vollständig zur Darstellung kommende einfach zusammenhängende Gebiet werde mit G bezeichnet. Die beiden in der Figur sichtbaren Durchschnittspunkte der Begrenzungslinien von B' und K mögen mit P und Q bezeichnet werden. Wir verbinden dann P und Q durch einen in G verlaufenden Kreisbogen K_2. Das an der Begrenzung des Gebiets G teilnehmende Stück der Kreislinie K werde mit K_1 bezeichnet. Die beiden Kreisbogen K_1 und K_2 begrenzen zusammen ein Kreisbogenzweieck Z_1. Indem wir das Kreisbogenzweieck Z_1 an K_2 spiegeln, ergibt sich ein neues Kreisbogenzweieck Z_2, aus diesem durch Spiegelung an seinem, von K_2 verschiedenen begrenzenden Kreisbogen ein weiteres Zweieck Z_3 usw. Da die Kreisbogenzweiecke $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ bei P und Q gleich große Winkel haben, so ist klar, daß wir nach endlich vielen Spiegelungen das ganze Innere der Kreisfläche K bedeckt haben.

Nunmehr zeigen wir, mit B'' das Gebiet $B' - G$ bezeichnend, daß man der Reihe nach die konforme Abbildung für die Gebiete $B'' + Z_1$, $B'' + Z_1 + Z_2$, $B'' + Z_1 + Z_2 + Z_3$ leisten kann. In der Tat kann man nach Voraussetzung für den Bereich B' die Abbildung auf das Innere des Einheitskreises leisten. Hierbei wird der Bereich $B'' + Z_1$ in einen Teilbereich β der Fläche des Einheitskreises übergehen und zwar so, daß dabei der Bogen K_2 in ein reguläres analytisches Begrenzungsstück s übertragen wird. Nunmehr kann der Bereich β mit Hilfe unseres Schmiegungsverfahrens konform auf die Fläche des Einheitskreises selbst abgebildet werden, wobei die Linie s regulär auf einen Kreisbogen s' übertragen wird. Wir besitzen daher jetzt eine konforme Abbildung des Bereichs $B'' + Z_1$ auf die Fläche des Einheitskreises, welche dem Kreisbogen K_2 einen Bogen s' auf der Peripherie des Einheitskreises regulär entsprechen läßt. Die betreffende Abbildungsfunktion ist demgemäß über K_2 hinaus analytisch fortsetzbar. Man übersieht insbesondere, daß bei dieser Abbildung das Kreisbogenzweieck Z_2 in ein gewisses schlichtes Gebiet außerhalb des Einheitskreises übergehen wird und zwar so, daß dabei dem neuen, Z_2 begrenzenden Kreisbogen K_3 wieder ein reguläres Begrenzungsstück entsprechen wird. Von der so gewonnenen Abbildung des Bereichs $B'' + Z_1 + Z_2$ auf einen

schlichten Bereich gelangen wir nun wiederum mittels des Schmiegungsverfahrens zu einer Abbildung desselben Bereichs auf die Fläche des Einheitskreises selbst, bei welcher dem Kreisbogen K_3 ein Stück der Peripherie des Einheitskreises in durchaus regulärer Weise entspricht. Man übersieht den Fortgang des Verfahrens. Es führt zu dem Resultat, daß der Bereich B, welcher aus B' durch Adjunktion einer Kreisscheibe entstand, seinerseits auf einen schlichten Bereich abbildbar ist und folglich auch auf das Innere des Einheitskreises.

Hiermit ist nun gezeigt, daß es möglich ist, jeden mittels endlich vieler Kreisscheiben gemäß dem Prinzip der Kreisscheibenüberdeckung erschöpfbaren, einfach zusammenhängenden, offenen Bereich auf das Innere einer gewöhnlichen schlichten Kreisfläche abzubilden, also z. B. jedes endlich vielblätterige gewöhnliche *Riemann*sche Flächenstück, welches nur endlich viele Windungspunkte in seinem Innern enthält und von endlich vielen analytischen Linienstücken begrenzt wird. Ein derartiges Flächenstück F läßt sich ja sofort als Teil eines weiteren Flächenstücks F^* betrachten, das seinerseits von endlich vielen übereinander greifenden Kreisscheiben gebildet wird. Es ergibt sich so auch, indem man zunächst die Abbildung von F^* auf eine Kreisfläche durchführt, wobei F in f übergehe, danach das nun schlichte Gebiet f auf eine Kreisfläche abbildet, die weitere Tatsache, daß bei der Abbildung der Fläche F auf das Innere des Einheitskreises die regulären Begrenzungsstücke in regulärer Weise auf Stücke der Peripherie des Einheitskreises abgebildet werden.

§ 4. Abbildung des geschlossenen einfach zusammenhängenden Bereichs.

Wir kommen nun zur Erledigung des Problems 2. Dazu benötigen wir einen Grenzübergang, vermöge dessen wir die in Figur 4 veranschaulichte Adjunktion der letzten Kreisscheibe K vornehmen, das ist derjenigen Kreisscheibe, deren Hinzunahme den vorher noch offenen Bereich B' in den geschlossenen einfach zusammenhängenden Bereich B verwandelt.

Wir denken uns den Mittelpunkt M der Kreisscheibe K aus dem abzubildenden Bereiche B entfernt, wodurch dieser Bereich in einen offenen Bereich B'' übergeht. Der Bereich B'' kann nun offenbar als Grenze

$$B'' = \lim_{n=\infty} B_n$$

von einfach zusammenhängenden Näherungsbereichen $B_n\,[n = 1, 2, 3, \ldots]$ aufgefaßt werden, deren jeder folgende aus dem vorhergehenden durch Adjunktion einer Kreisscheibe entsteht. Es handelt sich darum, aus der Kenntnis der Existenz der Abbildungsfunktionen für die Näherungsbereiche B_n die Existenz einer solchen Funktion für den Bereich B'' durch Ausführung des Grenzübergangs herzuleiten. Während wir weiter unten diesen Grenzübergang für ganz allgemeine offene *Riemann*sche Mannigfaltigkeiten ausführen werden, geben wir hier eine auf den vorliegenden Fall speziell zugeschnittene Methode des Grenzüberganges.

Wir bezeichnen mit O irgend einen Punkt innerhalb B_1. Mit $f_n(\tilde{z})$ bezeichnen wir die in B_n eindeutige und reguläre Funktion, welche die konforme Abbildung des Bereichs B_n auf die Fläche des Einheitskreises leistet. Durch die Schreibweise $\tilde{z}$ soll angedeutet werden, daß die Größe z nicht kontinuierlich in einer Ebene wandert, sondern vielmehr in dem als *Riemann*sche Mannigfaltigkeit gegebenen Bereiche B. Wir gehen nunmehr von der Funktion $f_n(\tilde{z})$ zu einer gewissen linearen Funktion dieser Größe über, welche wir in Abhängigkeit von der Größe $\tilde{z}$ mit $\varphi_n(\tilde{z})$ bezeichnen wollen. Die Bestimmung der linearen Funktion ist durch die Bedingung gegeben, daß an der Stelle O, für welche wir die Größe z (als ortsabbildende Hilfsvariable) gleich 0 sein lassen wollen, $\varphi_n(\tilde{z})$ die Entwicklung hat

$$\varphi_n(\tilde{z}) = \frac{1}{z} + ((0)),$$

unter $((0))$ eine bei $z = 0$ reguläre und in diesem Punkte selbst den Wert Null annehmende analytische Funktion verstanden.

Wir konstruieren nun um den Punkt $z = 0$ eine Kreislinie L_ϱ mit kleinem Radius ϱ und mit dem Punkte $z = 0$ als Mittelpunkt. Wir bezeichnen ferner mit $M_\varrho^{(n)}$ das Maximum des absoluten Betrages der Funktion $\varphi_n(\tilde{z})$ auf L_ϱ. Alsdann ist, wegen der Eineindeutigkeit der durch $\varphi_n(\tilde{z})$ geleisteten Abbildung, $M_\varrho^{(n)}$ auch das Maximum des absoluten Betrages der außerhalb L_ϱ im ganzen Bereiche B_n von $\varphi_n(\tilde{z})$ angenommenen Funktionswerte. Wir behaupten nun, daß

$$M_\varrho^{(n)} < M_\varrho$$

gesetzt werden kann für alle n, d. h. daß es eine von n unabhängige obere Schranke aller $M_\varrho^{(n)}$ gibt. Zum Beweise dieser Behauptung machen wir die Bemerkung, daß die Größe $M_\varrho^{(n)}$, wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung, bei festgehaltenem n wächst, wenn ϱ kleiner wird. Nun gilt folgender Hilfssatz.

Hilfssatz: Ist $F(z)$ eine für $|z| \leqq R$ eindeutige und, abgesehen vom Punkte $z = 0$ reguläre analytische Funktion, welche im Punkte $z = 0$ unstetig wird wie $\frac{1}{z} + ((0))$, welche ferner die Eigenschaft hat, daß das Maximum $\mathfrak{M}_\varrho$ ihres absoluten Betrages auf dem Kreise $|z| = \varrho \leqq R$ wächst, wenn ϱ verkleinert wird, so bleibt $\mathfrak{M}_R$ unterhalb einer Schranke M_R, welche nur von R abhängt, nicht jedoch von der Wahl der Funktion $F(z)$ —.

Zum Beweise benötigen wir das *Schwarzsche Lemma* (siehe unter § 6), in der Form, daß eine für $|z| \leqq R$ reguläre, im Punkte $z = 0$ selbst den Wert 0 annehmende analytische Funktion, die in dem genannten Gebiete dem absoluten Betrage nach $\leqq g$ bleibt, für $|z| \leqq \varrho < R$ dem absoluten Betrage nach $\leqq \frac{\varrho}{R} g$ bleibt. Wir werden von diesem Lemma insbesondere für $\varrho = \frac{R}{2}$ Gebrauch machen.

Die für $|z| \leqq R$ reguläre Funktion $F(z) - \frac{1}{z}$ bezeichnen wir mit $G(z)$ und haben demnach

$$F(z) = \frac{1}{z} + G(z).$$

Das Maximum des absoluten Betrages der Funktion $G(z)$ auf L_ϱ bezeichnen wir allgemein mit $\mathfrak{m}_\varrho$, wir haben dann

$$\mathfrak{M}_{\frac{R}{2}} \leqq \frac{1}{\frac{R}{2}} + \mathfrak{m}_{\frac{R}{2}}.$$

Nun ist nach dem *Schwarz*schen Lemma

$$\mathfrak{m}_{\frac{R}{2}} \leqq \frac{1}{2}\, \mathfrak{m}_R$$

und letztere Größe ist wegen $G = -\frac{1}{z} + F$

$$\leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \mathfrak{M}_R\right),$$

also

$$\mathfrak{M}_{\frac{R}{2}} \leqq \frac{2}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{\mathfrak{M}_R}{2}.$$

Nun soll aber voraussetzungsgemäß $\mathfrak{M}_R < \mathfrak{M}_{\frac{R}{2}}$ sein, daher ergibt sich

$$\mathfrak{M}_R \leqq \frac{5}{R}. \qquad \text{q. e. d.}$$

Wir finden jetzt, daß die Funktionen $\varphi_n(\tilde{z})$ dem absoluten Betrage nach im ganzen Bereich B_n unterhalb der Größe $\frac{5}{\varrho}$ bleiben, weil sie nach dem Hilfssatze auf L_ϱ unterhalb $\frac{5}{\varrho}$ bleiben und weil der absolute Betrag der Funktionswerte außerhalb L_ϱ im ganzen Bereiche B_n kleiner ist als das Maximum des absoluten Betrages auf L_ϱ.

Wir gehen nunmehr dazu über, den Nachweis zu führen, daß die Funktionenfolge

$$(*) \qquad \varphi_1(\tilde{z}), \varphi_2(\tilde{z}), \varphi_3(\tilde{z}), \ldots$$

in jedem Teilbereich B_ν des Bereichs B'' gleichmäßig konvergiert. Zu diesem Nachweise benötigen wir noch einen Hilfssatz.

Hilfssatz: Es sei $F(z)$ eine für das Kreisringgebiet $R \geqq |z| \geqq r$ reguläre eindeutige analytische Funktion, welche in diesem Gebiete dem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen Schranke g bleibt. Alsdann bleibt die Schwankung der Funktion $F(z)$ auf dem Symmetralkreise des genannten Kreisringes, d. i. auf dem Kreise vom Radius $\sqrt{rR}$, unterhalb einer von der Wahl der Funktion $F(z)$ unabhängigen, nur von G, r, R abhängenden Schranke, welche ihrerseits unendlich klein wird, wenn das Radienverhältnis $\frac{r}{R}$ bei Festhaltung von g unendlich klein wird. —

Beweis: Zum Beweise können wir annehmen, daß $r = \frac{1}{R}$ ist, in welchem Falle der Symmetralkreis mit dem Einheitskreise zusammenfällt. Diese zunächst geschlossene Kreislinie denken wir uns im Punkte -1 durch Punktierung aufgetrennt. Machen wir jetzt eine konforme Abbildung des Kreisringes mit Hilfe der Funktion $\log z = \zeta$, so wird der Kreisring auf die Fläche eines Parallelstreifens abgebildet, dessen begrenzende Seiten zu beiden Seiten der Achse des Imaginären, parallel mit dieser, im Abstande $\log R$ von derselben verlaufen. Die Achse des Imaginären

selbst erscheint als Bild des z-Einheitskreises, welcher, gemäß der Auftrennung des z-Einheitskreises im Punkte -1, in unendlich viele untereinander gleichlange Stücke von der Länge 2π zerlegt erscheint, deren eines, σ, den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat. Denken wir uns nunmehr die Funktion $F(z)$ als Funktion der Größe ζ im genannten Parallelstreifen aufgefaßt, insbesondere in dem Kreise K um den Nullpunkt als Mittelpunkt mit dem Radius $\log R$, welcher Kreis die Begrenzung des Parallelstreifens in dem Punkte $\pm \log R$ berührt. Diese Funktion, vermindert um ihren Wert an der Stelle $\zeta = 0$, werde mit $\Phi(\zeta)$ bezeichnet. Wir haben dann $|\Phi(\zeta)| < 2g$ für den ganzen Parallelstreifen, daher auch für die Kreisfläche K. Daher wird, unter der Voraussetzung $\pi < \log R$, für $|\zeta| < \pi$ nach dem *Schwarz*schen Lemma

$$|\Phi(\zeta)| < 2g\frac{\pi}{\log R},$$

also die Schwankung dieser Funktion in demselben Gebiete, mithin auch auf σ, kleiner als $4g\frac{\pi}{\log R}$. (Diese Formel bleibt selbstverständlich auch gültig, wenn $\pi \geqq \log R$ ist, also $\frac{\pi}{\log R} \geqq 1$ ist, da immer $|\Phi(\zeta)| \leqq 2g$ ist.)

Wir machen nun von dem vorstehenden Hilfssatze Anwendung auf die Funktionen $\varphi_n(\tilde{z})$. Es sei R der Radius der Kreisscheibe K. Die Funktion $\varphi_n(\tilde{z})$ ist nur in einem Teil dieser Kreisscheibe erklärt, nämlich in dem Teile $B_n - K = \beta_n$. Das zweifach zusammenhängende Gebiet β_n enthält vollständig einen von zwei konzentrischen Kreisen begrenzten Kreisring K_n mit den Radien R und r_n, wobei $\lim\limits_{n=\infty} r_n = 0$ ist. Nach dem jetzt bewiesenen Hilfssatz folgt nun, daß auf dem Symmetralkreise s_n von K_n die Schwankung $\underset{s_n}{D}(\varphi_n)$ der Funktion $\varphi_n(\tilde{z})$ und die Schwankung $\underset{s_n}{D}(\varphi_{n+m})$ der Funktion $\varphi_{n+m}(\tilde{z})$ folgenden Beschränkungen unterliegt:

$$\left.\begin{matrix}\underset{s_n}{D}(\varphi_n) \\ \underset{s_n}{D}(\varphi_{n+m})\end{matrix}\right\} < \frac{8\pi M_\varrho}{\log\frac{R}{r_n}},$$

mithin die Schwankung

$$\underset{s_n}{D}(\varphi_{n+m} - \varphi_n) < \frac{16\pi M_\varrho}{\log\frac{R}{r_n}}.$$

Hieraus folgt, daß die letztere Größe, ebenso wie die beiden ersten, unendlich klein wird, wenn n unendlich groß wird. Berücksichtigt man jetzt weiter, daß die Differenz $\varphi_{n+m} - \varphi_n$ eine Funktion ist, die im ganzen Bereiche B_n regulär ist, so folgt, daß die Schwankung der Funktion $\varphi_{n+m} - \varphi_n$ nicht nur auf s_n, sondern damit überhaupt im ganzen Inneren des von s_n begrenzten Teiles S_n von B_n gleichmäßig unendlich klein wird, wenn n unendlich groß wird. Da nun die genannte Differenzfunktion im Punkte O den Wert Null hat, so folgt schließlich, daß diese Differenz selbst im Gebiete S_n, mithin in jedem festgehaltenen Gebiete B_ν gleichmäßig unendlich klein wird, wenn n unendlich groß wird.

Es sei $\varphi_\infty(\tilde{z})$ die gewonnene Grenzfunktion $\lim \varphi_n(\tilde{z})$. Von dieser Funktion stellen wir zunächst auf Grund der bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz fest, daß sie ihrerseits in B'' eine eindeutige reguläre analytische Funktion ist, welche nur im Punkte O unstetig wird wie $\frac{1}{z} + ((0))$. Ferner gilt von der Funktion $\varphi_\infty(\tilde{z})$, daß sie in jedem, den Punkt O ausschließenden Teilbereiche von B'' beschränkt ist; denn die Näherungsfunktionen $\varphi_n(\tilde{z})$ bleiben ja in diesem Teilbereiche sämtlich unterhalb einer von n unabhängigen endlichen Schranke.

Die Funktion $\varphi_\infty(\tilde{z})$ vermittelt ebenso wie die Näherungsfunktionen $\varphi_n(z)$ eine schlichte Abbildung ihres Definitionsgebietes B'', welches dabei in einen, den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthaltenden schlichten einfach zusammenhängenden Bereich β' übergeht. Dieser Bereich β' wird nun ebenfalls nur von einem isolierten Punkt begrenzt sein können. In der Tat ergibt sich dies sofort aus der Anwendung des Hilfssatzes Seite 80 dieses Paragraphen auf die Funktion $\varphi_\infty(\tilde{z})$ für die Umgebung des Mittelpunktes M der Kreisscheibe K, indem man einen Kreisring von beliebig großem Radienverhältnis mit M als Mittelpunkt in der unmittelbaren Umgebung von M konstruiert. Dem Symmetralkreise dieses Kreisrings muß dann im Bereiche β', dem Hilfssatze zufolge, eine Linie von beliebig kleiner Schwankung entsprechen.

Eine besondere Untersuchung erfordert noch die Frage, ob die Funktion $\varphi_\infty(\tilde{z})$, von welcher jetzt bereits feststeht, daß sie die Umgebung des Punktes M *stetig* auf die Umgebung eines gewissen Punktes a überträgt, im Punkte M selbst noch ***regulär*** ist. Diese Frage darf nicht über-

gangen werden, da wir ja die Öffnung des geschlossenen Bereichs B im Punkte M künstlich angebracht haben, dadurch den Bereich B in den Bereich B'' verwandelnd. Daß diese Regularität in der Tat besteht, haben wir an anderer Stelle (Abhandlung I der Serie, § 7, Satz III) besonders bewiesen durch ein Verfahren, welches ganz auf Prinzipien der konformen Abbildung selbst basiert ist. Auf diesen Satz III hätten wir uns auch ohne weiteres berufen können, was sich insbesondere dann empfiehlt, wenn wir die Abbildungsmöglichkeit von B'' aus dem allgemeinen Resultate der §§ 5—7 entnehmen.

§§ 5 bis 7. Abbildung des allgemeinsten offenen Bereichs.

§ 5. Ansatz und Einteilung der Beweisführung.

Ein als *Riemann*sche Mannigfaltigkeit vorgelegter Bereich B werde jetzt ganz allgemein als Grenze immer weiterer Bereiche in der Form $B = \lim_{n=\infty} B_n$ aufgefaßt. Dieser Bereich B ist dann, ebenso wie die Näherungsbereiche B_n, als ein offener Bereich anzusehen. Es ist zur vollständigen Gewinnung des in § 2 formulierten Fundamentalsatzes der konformen Abbildung zu zeigen, daß der Bereich B eineindeutig konform abgebildet werden kann entweder auf die schlichte Fläche eines endlichen Kreises (allgemeiner Fall) oder auf die ganze Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes.

Der Beweis erfordert die Durchführung eines Grenzüberganges. Wir bezeichnen mit O einen Punkt innerhalb des Bereichs B_1, für welchen wir $z = 0$ sein lassen, unter z die zum Punkte O im Sinne des § 1 gehörende Ortsveränderliche verstanden. Wir wollen uns ferner, was offenbar zulässig ist, vorstellen, daß für jeden Wert des Index n der Bereich B_n ganz im Innern des Bereichs B_{n+1} enthalten sei, und zwar so, daß die Begrenzung des ersteren Bereichs keinen Punkt mit der Begrenzung des letzteren gemeinschaftlich hat.

Nunmehr verstehen wir unter $Z_n = f_n(z)$ diejenige analytische Funktion, welche den Bereich B_n konform auf das schlichte Innere eines Kreises K_n mit dem Radius R_n in der Weise konform abbildet, daß dabei der Punkt O, für welchen $z = 0$ gedacht wurde, in den Punkt $Z = 0$ übergeht und daß die Ableitung an der Stelle $z = 0$ den Wert 1 hat. Es ist dies eine völlig bestimmte Abbildung, bei welcher sich der Radius R_n von selbst in eineindeutiger Weise bestimmt.

Wir machen zunächst die Bemerkung, daß

$$R_1 < R_2 < R_3 < \cdots$$

ist. Es ist nämlich die Größe $\frac{Z_{n+1}}{Z_n}$, als Funktion der Größe Z_n, eine Funktion, welche innerhalb K_n regulär erklärt ist und im Nullpunkte den Wert 1 hat. Diese Größe wird daher in beliebiger Nähe der Peripherie des Kreises K_n Werte annehmen, deren absoluter Betrag größer als 1 ist, d. h. es wird in beliebiger Nähe der Begrenzung des Bereichs B_n die Beziehung $|Z_{n+1}| > |Z_n|$ erfüllbar sein. Dies aber hat offenbar im Gefolge, daß $R_{n+1} > R_n$ ist.

Es bietet sich uns nunmehr die fundamentale Unterscheidung dar:

(A) $\lim\limits_{n=\infty} R_n = R =$ endliche Größe,

(B) $\lim\limits_{n=\infty} R_n = \infty$.

[A.] Im Falle (A) behaupten wir, daß die Funktionenfolge $f_n(z)$ in jedem Bereiche B_ν gleichmäßig konvergiert und daß die Grenzfunktion $f_\infty(z)$ eine konforme Abbildung des ganzen Bereichs B auf das vollständige Innere des Kreises $K^{(R)}$ der Z-Ebene vermittelt, welcher den Nullpunkt zum Mittelpunkt und R zum Radius hat.

[B.] Im Falle (B) behaupten wir ebenfalls die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Funktionen $f_n(z)$ in jedem Bereiche B_ν gegen eine Grenzfunktion $f_\infty(z)$, welche eine konforme Abbildung des ganzen Bereichs B auf die vollständige Z-Ebene (exkl. des unendlich fernen Punktes) leistet.

Zum Beweise der Behauptung [A] genügt es, folgendes darzutun:

a) Der Quotient $\frac{f_{n+m}(z)}{f_n(z)}$ ist eine Größe, welche in B_ν gleichmäßig gegen den konstanten Wert 1 konvergiert, wenn n über alle Grenzen hinaus wächst, wobei m völlig beliebig bleiben darf.

In der Tat hat man dann

$$\frac{f_{n+m}(z)}{f_n(z)} = 1 + \varepsilon\,, \qquad \text{daher}$$

$$|f_{n+m}(z) - f_n(z)| < \varepsilon \cdot R,$$

d. h. die gleichmäßige Konvergenz der Folge der Funktionen $f_n(z)$ in B_ν.

Daß die Grenzfunktion $f_\infty(z)$ eine eineindeutige Abbildung des Bereichs B auf einen *schlichten* Bereich vermittelt, ergibt sich aus dem entsprechenden Verhalten der Näherungsfunktionen $f_n(z)$ in derselben Weise wie in Abhandlung I, § 5.

Weiter wäre, um die vollständige Ausfüllung der Kreisfläche $K^{(R)}$ bei der durch die Grenzfunktion vermittelten Abbildung des Bereichs B darzutun, folgendes zu zeigen:

b) Die Bildkurve $L_n^{(\nu)}$, welche der Begrenzungslinie $L^{(\nu)}$ des Bereichs B_ν in der Z_n-Ebene bei der durch die Funktion $f_n(z)$ $[n = \nu+1, \nu+2 \ldots]$ vermittelten Abbildung entspricht, ist vollständig in einem Ringe enthalten, dessen äußerer Begrenzungskreis ein von $K^{(R)}$ umschlossener, von n unabhängig bestimmbarer Kreis K_{r_ν} ist, $(r_\nu < R)$, während der innere Begrenzungskreis ein ebenfalls von n unabhängig bestimmbarer Kreis $K_{r'_\nu}$ ist.

c) Der erwähnte Radius r'_ν und damit selbstverständlich auch r_ν konvergiert für $\nu = \infty$ gegen R.

Man hat zu beachten, daß nun die Aussagen b) und c) sich von selbst übertragen auf die Grenzkurve $L_\infty^{(\nu)}$ als Bildkurve von L_ν bei der durch die Funktion $f_\infty(z)$ vermittelten Abbildung des Bereichs B.

Zum Beweise der Behauptung [B] andererseits genügt es, folgende Punkte darzutun.

d) Die Funktionen $f_n(z)$ bleiben im Bereiche B_ν ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer von n unabhängigen endlichen Schranke G_ν.

e) Der Quotient $\frac{f_{n+m}(z)}{f_n(z)}$ konvergiert in B_ν gleichmäßig gegen den Wert 1, wenn n über alle Grenzen wächst, wobei m eine völlig beliebige positive ganze Zahl ist.

f) Für die Bildkurven $L_n^{(\nu)}$ in der Z-Ebene läßt sich von n unabhängig ein dieselbe enthaltender Kreisring mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt, begrenzt von Kreisen K_{ϱ_ν} und $K_{\varrho'_\nu}$ mit Radien ϱ_ν und ϱ'_ν, ermitteln, wobei $\varrho_\nu > \varrho'_\nu$ ist.

g) Die Größe ϱ'_ν und folglich auch die Größe ϱ_ν wird unendlich groß, wenn ν über alle Grenzen wächst.

Zu Vorstehendem bemerken wir noch, daß die Existenz eines Kreises K_{ϱ_ν} implizite bereits in d) behauptet ist. In der Tat kann man ja $\varrho_\nu = G_\nu$ wählen.

§ 6. Hilfssätze.

Zur Durchführung der Konvergenzbeweise benötigen wir einige Hilfssätze, insbesondere die unten mit A und B bezeichneten, zu deren Beweis wir den Ausgangspunkt beim *Schwarz*schen Lemma nehmen.

Satz 1. (*Schwarzsches Lemma.*) Es sei $\zeta = F(z)$ eine innerhalb

des z-Einheitskreises, ($|z| < 1$), regulär erklärte analytische Funktion von z, welche für $z = 0$ den Wert Null annimmt und deren Werte, geometrisch gesprochen, auf das Innere des ζ-Einheitskreises, ($|\zeta| < 1$), beschränkt sind; alsdann sind die dem Kreise $|z| \leqq \varrho$ entsprechenden ζ-Werte auf das Innere des Kreises $|\zeta| \leqq \varrho$ beschränkt.

Satz 2. Es sei $\zeta = F(z)$ eine innerhalb des z-Einheitskreises, ($|z| < 1$), regulär erklärte analytische Funktion von z, deren Werte, geometrisch gesprochen, auf das Innere des ζ-Einheitskreises, ($|\zeta| < 1$), beschränkt sind. Es sei ferner $\zeta^{(0)}$ der dem Punkte $z = 0$ entsprechende Wert. Alsdann sind die dem Kreise $|z| \leqq \varrho$ entsprechenden Werte auf das Innere eines Kreises K_0 beschränkt, der den Punkt $\zeta^{(0)}$ umschließt und seinerseits vom ζ-Einheitskreise umschlossen wird. Dieser Kreis K_0 entsteht aus dem Kreise $|\zeta| \leqq \varrho$ durch diejenigen linearen Transformationen des Einheitskreises in sich, bei welchen der Nullpunkt in den Punkt $\zeta^{(0)}$ übergeht.

Zusatz 1. Der Kreis K_0 geht, unter unbegrenzter Verkleinerung seines Radius, stetig in den Einheitspunkt (bezw. einen beliebigen Punkt P des ζ-Einheitskreises) über, wenn der Punkt $\zeta^{(0)}$ unter Festhaltung von ϱ seinerseits stetig in den Einheitspunkt (bezw. den Punkt P) übergeht.

Zusatz 2. Die Kreisfläche K_0 nähert sich, indem gleichzeitig ihr Radius unendlich klein wird, asymptotisch der Peripherie des Einheitskreises, wenn der Punkt $\zeta^{(0)}$ seinerseits eine solche Bewegung ausführt.

Zusatz 3. Die Kreisfläche K_0 reduziert sich gleichmäßig auf den Punkt $\zeta^{(0)}$, wenn man ϱ unendlich klein werden läßt.

Der Beweis des Satzes 2 und seiner Zusätze ergibt sich unmittelbar und in anschaulicher Weise durch Betrachtung der Funktion $\xi(\zeta(z))$ als Funktion von z, unter $\xi(\zeta)$ diejenige lineare Funktion ζ verstanden, welche den Einheitskreis in sich transformiert und dabei den Punkt $\zeta^{(0)}$ in den Nullpunkt überführt. Für diese neue Funktion von z sind nämlich die Voraussetzungen des *Schwarz*schen Lemmas („Satz 1“) erfüllt.

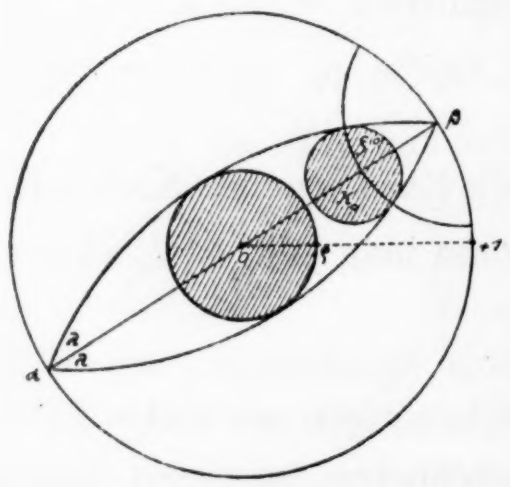

Fig. 5.

Die Entstehung der Kreisfläche K_0 aus der Kreisfläche $|z| \leqq \varrho$ zeigt beigefügte Figur 5. Die zum Verständnisse der Figur zu betrachtende lineare Transformation

hat die Eigenschaft, die Punkte α und β einzeln sowie die Peripherie des Einheitskreises im ganzen in sich überzuführen, ferner den Nullpunkt in den Punkt $\zeta^{(0)}$. Dabei werden auch die beiden α und β verbindenden Kreisbogen und der verbindende Durchmesser einzeln in sich verschoben.

Satz 3. Es sei $\zeta = F(z)$ eine innerhalb des z-Einheitskreises, ($|z| < 1$), regulär erklärte analytische Funktion von z, deren Werte der Bedingung $0 < |\zeta| < Q$ genügen, wobei $Q > 1$ sei. Es sei ferner $F(0) = 1$. Alsdann entspricht der Beschränkung der Variablen z auf das Gebiet $|z| \leq \varrho < 1$ eine Beschränkung der Variablen ζ auf ein von der Wahl der Funktion $F(z)$ unabhängig angebbares Gebiet β innerhalb des Gebietes $0 < |\zeta| < Q$. Dieses Gebiet bewahrt einen gewissen, von Null verschiedenen Abstand sowohl vom Nullpunkte als auch vom Kreise $|\zeta| = Q$. Es gilt ferner der wichtige Zusatz:

Zusatz. Das Gebiet β geht gleichmäßig in seiner ganzen Ausdehnung in den Einheitspunkt über, wenn Q bei festgehaltenem ϱ unbegrenzt gegen 1 abnimmt.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar und in anschaulicher Weise durch Betrachtung der Funktion $\xi(\zeta(z))$, unter $\xi(\zeta)$ diejenige lineare Funktion der Größe $\log \zeta$ verstanden, welche bei Zugrundelegung des Hauptzweiges der Funktion Logarithmus, den Punkten Q, 1, 0 der ζ-Ebene der Reihe nach die Punkte $+1$, 0, -1 in der ξ-Ebene entsprechen läßt. Für die Funktion $\xi(\zeta(z))$ als Funktion von z sind nämlich jetzt die Voraussetzungen des *Schwarz*schen Lemmas erfüllt. Zum Beweise des Hilfssatzes und seines Zusatzes hat man sich also nur den geometrischen Übertragungsprozeß klarzumachen, der von der Kreisfläche $|\xi| \leq \varrho$ über die entsprechende (in Fig. 7 schraffierte) Kreisfläche in der ($\log \zeta$)-Ebene zum Bereiche β in der ζ-Ebene selbst führt. Vgl. die Figuren 6 und 7.

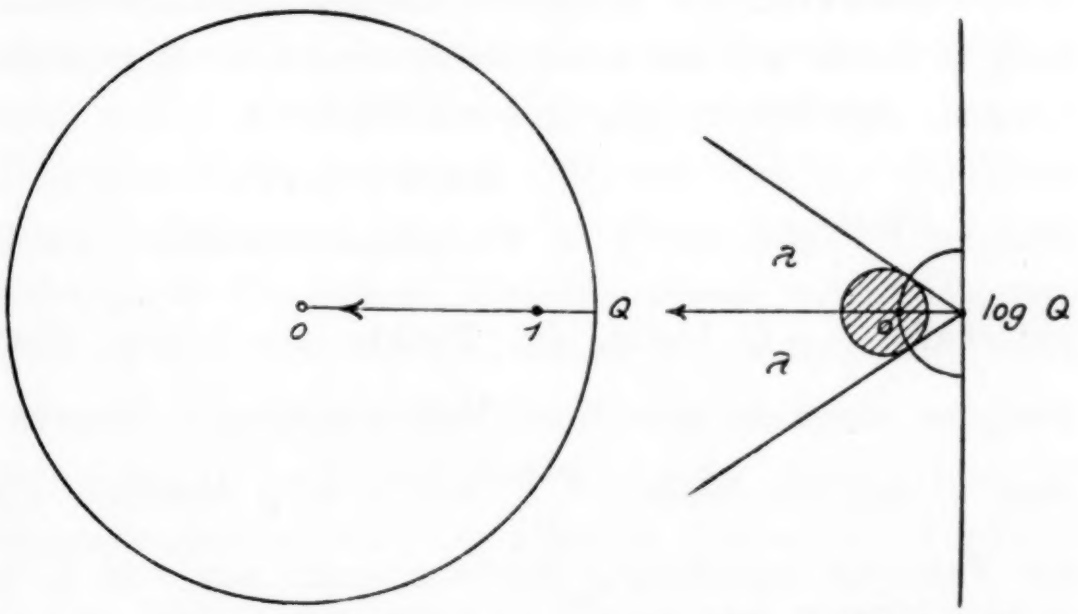

Fig. 6 (ζ-Ebene).

Fig. 7 (($\log \zeta$)-Ebene).

In letzterer Figur ist der Winkel λ den gleichbezeichneten Winkeln der Figur 5 der Größe nach gleich.

Hilfssatz A. 1. Es sei $\varphi(z)$ eine für $|z| \leqq 1$ reguläre analytische Funktion, welche für $z = 0$ den Wert Null annimmt und an derselben Stelle die Ableitung 1 hat, welche ferner von der Fläche des z-Einheitskreises ein durchaus schlichtes Bild Φ entwirft, enthalten innerhalb eines Kreises K_Q vom Radius $Q > 1$ mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Alsdann gibt es eine von der Wahl der Funktion $\varphi(z)$ unabhängige, nur von Q abhängende Größe q, kleiner als 1, von der Art, daß die Begrenzungslinie L des Bereichs Φ ganz außerhalb des Kreises K_q mit dem Radius q verläuft. — Diese Größe q möge für die Folge als die obere Grenze aller für sie zulässigen Werte angenommen werden*).

2. Unter denselben Voraussetzungen läßt sich von der Bildkurve l_ϱ des Kreises $|z| = \varrho < 1$ behaupten, daß sie zwischen konzentrischen Kreisen mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und den Radien ϱQ und ϱq enthalten ist.

3. Die durch Q bestimmte Größe q konvergiert gegen 1, wenn Q gegen 1 herabsinkt.

Beweis: Da $\varphi(z)$ dem absoluten Betrage nach für $|z| < 1$ unterhalb Q bleibt und für $z = 0$ verschwindet, so folgt nach dem *Schwarz*schen Lemma, daß für $|z| \leqq \varrho < 1$ stattfindet

$$|\varphi(z)| < \varrho Q.$$

Nun ist $\frac{\varphi(z)}{z}$ eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion, die in diesem Bereiche unterhalb $\frac{Q}{1} = Q$ bleibt, im Punkte $z = 0$ den Wert 1 annimmt und übrigens nirgends den Wert Null annimmt. Hieraus ergibt sich nach Satz 3, daß die Größe $\left|\frac{\varphi(z)}{z}\right|$ für $|z| \leqq \varrho$ oberhalb einer von der Wahl der Funktion unabhängig bestimmbaren, nur von Q und ϱ abhängenden endlichen Schranke q'_ϱ bleibt, die ihrerseits kleiner als 1 ist. Wir finden daher für $|z| = \varrho$ die Ungleichheitsbeziehung

$$(*) \qquad |\varphi(z)| > \varrho q'_\varrho.$$

Es steht damit zugleich fest, daß $|\varphi(z)|$ für $|z| = 1$ oberhalb einer gewissen Größe q bleibt, die wir nun näher definieren können als die obere Grenze aller in dieser Weise zulässigen Werte q. q. e. d.

*) Vgl. den weitergehenden Satz B, welcher unten bewiesen wird.

Die Behauptung A, 2 ist eine unmittelbare Folge des Satzes A, 1. Die obere Schranke ϱQ nämlich ergibt sich aus dem *Schwarz*schen Lemma und wurde bereits oben angegeben, die untere Schranke ϱq hingegen folgt aus dem Satze A, 1 selbst, wenn derselbe dem Prinzipe der Ähnlichkeit entsprechend angewendet wird auf die Kreisfläche $|z| = \varrho$ statt auf die Fläche des Einheitskreises, wobei dann $|\varphi(z)|$, wie gesagt, unterhalb ϱQ bleibt.

Der Satz A, 3 schließlich ergibt sich aus der Formel (*), wenn man bedenkt, daß jedenfalls q größer ist als $\varrho q'_\varrho$, daß man ferner es in der Hand hat, bei gegen 1 abnehmendem Q die Größe ϱ beliebig nahe an 1 zu wählen, und dann beachtet, daß q'_ϱ eine Größe ist, die jetzt bei festgehaltenem ϱ (nach Satz 3, Zusatz) sich unbegrenzt dem Werte 1 nähert, wenn Q gegen 1 herabsinkt.

Hilfssatz B. 1. Es sei $\varphi(z)$ für $|z| \leqq 1$ eine reguläre analytische Funktion, welche die Fläche des Einheitskreises schlicht auf die Fläche eines endlichen, jedoch nicht weiter beschränkten Gebietes Φ abbildet, wobei der Nullpunkt sich selbst entsprechen soll und der Wert der Ableitung an derselben Stelle den Wert 1 haben soll. Alsdann gibt es eine, von der Wahl der Funktion $\varphi(z)$ unabhängige, von Null verschiedene positive Größe $\tilde{q}$ unterhalb 1, so daß die Bildkurve L des Einheitskreises, d. i. die Begrenzungslinie des Bereichs Φ die Kreislinie $K_{\tilde{q}}$ mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und $\tilde{q}$ als Radius vollständig umschlingt.

2. Unter denselben Voraussetzungen läßt sich von der Bildkurve l_ϱ des Kreises $|z| = \varrho < 1$ behaupten, daß sie in einem von der Wahl der Funktion $\varphi(z)$ unabhängigen Ringgebiete verläuft, dessen innerer Begrenzungskreis den Radius $\varrho\tilde{q}$ hat, während der äußere Begrenzungskreis einen von der Wahl der Funktion $\varphi(z)$ unabhängigen endlichen Radius $\tilde{Q}_\varrho$ hat.

Beweis. Die Linie L muß zum Teil innerhalb, zum Teil außerhalb des Einheitskreises verlaufen, weil der absolute Betrag der Funktion $\frac{\varphi(z)}{z}$ im Nullpunkte den Wert 1 hat, folglich für $|z| = 1$ sowohl größere als auch kleinere Werte annehmen wird. Wir können einen Punkt auf der Peripherie des Einheitskreises, jedoch außerhalb L liegend, durch eine Linie Λ außerhalb L mit dem unendlich fernen Punkte verbinden, wobei wir die Peripherie des Einheitskreises zum letzten Mal in α treffen mögen, welchen Punkt wir erlaubter Weise für unsere Untersuchung mit dem Punkte 1 zusammenfallend annehmen dürfen. Das Stück der Linie Λ vom

Punkte 1 bis ∞ werde mit λ bezeichnet. Der Bereich Φ ist dann vollständig als Teilbereich enthalten in dem Bereiche Φ', welcher gebildet wird von der längs λ aufgeschnittenen und auf diese Weise begrenzt vorgestellten φ-Ebene. Nunmehr ist klar, daß der Bereich Φ auch als Teilbereich enthalten ist auf derjenigen zweiblätterigen *Riemann*schen Fläche, welche man erhält, indem man sich Φ' in zwei koinzidierenden Exemplaren denkt und dieselben über Kreuz zu einer Fläche F mit zwei Windungspunkten erster Ordnung, nämlich bei 1 und ∞, zusammenheftet. Auf dieser zweiblätterigen Fläche läßt der Bereich Φ die dem neu hinzugekommenen Blatte angehörende Einheitskreisscheibe völlig unbedeckt. Wir deuten jetzt durch $h(\varphi)$ diejenige elementare Funktion an, welche die Fläche F mit dem Bereiche Φ in der Weise auf die schlichte Ebene abbildet, daß dabei der Nullpunkt des ersten Blattes festbleibt, der Nullpunkt des zweiten Blattes hingegen ins Unendliche geht und im ersteren Blatte der Wert der Ableitung an der Nullstelle gleich 1 ist.

Auf die Funktion $h(\varphi(z))$ als Funktion von z finden jetzt die Voraussetzungen des Hilfssatzes A Anwendung. Die Funktion $h(\varphi(z))$ bleibt insbesondere für $|z| \leqq 1$ unterhalb einer endlichen Schranke Q; denn die von ihr für $|z| \leqq 1$ angenommenen Werte liegen sämtlich in demjenigen endlichen Bezirke, auf welchen die Fläche F nach Ausschneidung der zweiten Einheitskreisscheibe abgebildet wird. Hiermit ist die Existenz der Größe $\tilde{q}$ nachgewiesen.

Die Behauptung 2 des Hilfssatzes B ergibt sich nun folgendermaßen: Zunächst die untere Schranke $\varrho \cdot \tilde{q}$ versteht sich von selbst auf Grund des jetzt als bewiesen geltenden ersten Teiles des Hilfssatzes B, indem man diesen Hilfssatz statt auf die Fläche des Einheitskreises auf die Fläche des Kreises $|z| \leqq \varrho$ anwendet. Um jetzt die obere Schranke $\tilde{Q}_\varrho$ zu gewinnen, betrachten wir die Funktion $\frac{z}{\varphi(z)}$ für $|z| \leqq 1$. Diese Größe ist stets von Null verschieden, nimmt für $z = 0$ den Wert 1 an und bleibt dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke, nämlich $\frac{1}{\tilde{q}}$, welche Größe ihrerseits oberhalb 1 liegt. Nach Satz 3 (S. 87) bleibt daher für $|z| \leqq \varrho$ die Größe $\frac{z}{\varphi(z)}$ dem absoluten Betrage nach oberhalb einer von Null verschiedenen endlichen Schranke q_ϱ. Dies ergibt für $|z| = \varrho$ die Relation $|\varphi(z)| < \varrho\, q_\varrho$.

§ 7. Durchführung des Abbildungsbeweises. (Fall A und Fall B.)

Es sind nunmehr die in § 5 aufgestellten Behauptungen a), b), c) zu beweisen, womit dann der Beweis der Behauptung [A] (Fall des Zustandekommens einer endlichen Kreisfläche als Bildfläche) geliefert ist, ferner die Behauptungen d), e), f), g), womit dann der Beweis der Behauptung [B] (Fall des Zustandekommens der ganzen unendlichen Ebene als Bildfläche) geliefert ist.

Wir fassen zunächst die Behauptungen b) und c) ins Auge. Es handelt sich dabei um den Nachweis des Vorhandenseins der beiden von n unabhängig zu bestimmenden Kreise K_{r_ν} und $K_{r'_\nu}$, wobei $R > r_\nu > r'_\nu$ ist.

Bei der durch die Funktion $f_\nu(z)$ vermittelten Abbildung des Bereiches B_ν ergibt sich als Bild des Bereiches B_ν das ganze Innere des Kreises vom Radius R_ν mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt, welchen Kreis wir oben mit K_ν bezeichneten. Die Peripherie des Kreises K_ν wäre als die Linie $L_\nu^{(\nu)}$ zu bezeichnen. Wird nun der Bereich B_ν durch die Funktion $f_n(z)$ $(n > \nu)$ abgebildet, so ist diese Größe Z_n in Abhängigkeit von Z_ν eine Funktion, welche für die Kreisfläche K_ν erklärt ist, ihrem absoluten Betrage nach unterhalb R, d. i. $\lim\limits_{n=\infty} R_n$, bleibt und in dem bei der Abbildung festbleibenden Nullpunkte die Ableitung 1 besitzt. Hieraus folgt nach Hilfssatz A die Existenz des von n unabhängigen Kreises $K_{r'_\nu}$. Es ergibt sich gleichzeitig mit dem vorstehenden nach dem Satze A, 3 aus dem Umstande, daß R_ν bei hinreichend groß gewähltem ν sich beliebig wenig von R, mithin $\frac{R\nu}{R}$ sich beliebig von 1 unterscheidet, die weitere Tatsache $\lim\limits_{\nu=\infty} r'_\nu = R$, d. i. die Behauptung c).

Die Existenz des Kreises K_{r_ν} andererseits ergibt sich sehr einfach aus der Bemerkung, daß die Linie $L_{\nu+1}^{(\nu)}$, wenn wir den Abstand ihres vom Nullpunkte am weitesten entfernten Punktes mit $\sigma_\nu \cdot R_{\nu+1}$ bezeichnen, unter σ_ν eine reelle positive Größe unterhalb 1 verstanden, durch Vermittlung der Funktion $Z_n(Z_{\nu+1})$ in die Linie $L_n^{(\nu)}$ übergeht*), welche Linie folglich nach

---

*) Mit $L_n^{(\nu)}$ $[n = \nu, \nu+1, \nu+2, \ldots]$ bezeichneten wir allgemein die durch Abbildung des Bereichs B_ν vermittelst der Funktion $f_n(z)$ entstehende Bildkurve der Be-

dem *Schwarz*schen Lemma, angewandt auf die Funktion $Z_n(Z_{\nu+1})$, innerhalb des Kreises mit dem Radius $\sigma_\nu R$ bleibt. Es kann also $r_\nu = \sigma_\nu \cdot R$ gewählt werden.

Nachdem so die Behauptungen b) und c) vollständig bewiesen sind, bleibt noch die Behauptung a) zu beweisen. Diese aber ergibt sich nunmehr folgendermaßen. Die Funktion $\frac{f_{n+m}(z)}{f_n(z)} = \frac{Z_{n+m}}{Z_n}$, betrachtet als Funktion der Größe Z_n, ist eine innerhalb des Kreises K_n der Z-Ebene reguläre Funktion von Z_n, die dem absoluten Betrage nach unterhalb $Q = \frac{R_{n+m}}{R_n}$ bleibt und im Nullpunkte den Wert 1 hat. Die Größe Q wird bei unbegrenzt wachsendem n, wegen $\lim_{n=\infty} R_n = R$, gegen 1 konvergieren. Dabei wird die Linie $L_n^{(\nu)}$ innerhalb des Kreises K_{r_ν} (§ 5, b) bleiben. Demgemäß wird der zu untersuchende Quotient $\frac{Z_{n+m}}{Z_n}$ in dem von $L_n^{(\nu)}$ begrenzten Bezirke $B_n^{(\nu)}$ nach Satz 2 des § 6 gleichmäßig gegen 1 konvergieren, d. h. es wird $\frac{f_{n+m}(z)}{f_n(z)}$ in B_ν gleichmäßig gegen 1 konvergieren. Der Inhalt der Behauptung [A] ist damit vollständig bewiesen.

Wir kommen nunmehr zur Erledigung der oben § 5 formulierten Behauptungen d), e), f,) g), mit deren Erledigung der Beweis der Behauptung [B] des § 5 geliefert sein wird.

Lenken wir unsere Aufmerksamkeit zunächst auf die Behauptungen d), f), g). Wie bereits oben erwähnt wurde, ist die Behauptung d) wesentlich in der Behauptung f) mitenthalten. Es bleiben also die Punkte f), g) zu erledigen. Die Linie $L_n^{(\nu)}$ bleibt nach Hilfssatz B, 1, angewandt auf die Funktion $Z_n(Z_\nu)$, außerhalb eines Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius $\tilde{q} R_\nu$. Hiermit ist nicht nur die eine Hälfte der Behauptung f), sondern auch die Behauptung g) bewiesen, da $\lim_{\nu=\infty} R_\nu$ im betrachteten Falle den Wert ∞ hat. Der zweite Teil der Behauptung f) wird gefunden, indem man die Funktion $Z_n(Z_{\nu+1})$ betrachtet, welche für $|Z| < R_{\nu+1}$ regulär erklärt ist und der Linie $L_{\nu+1}^{(\nu)}$ die Linie $L_n^{(\nu)}$ entsprechen läßt. Wir bezeichnen mit $\varrho_\nu R_{\nu+1}$ den Abstand des am weitesten vom Nullpunkt entfernten Punktes der Linie $L_{\nu+1}^{(\nu)}$. Es ist dann $\varrho_\nu < 1$, und wir finden, unter Anwendung

---

grenzungslinie $L^{(\nu)}$ des Bereichs B_ν. Insbesondere ist $L_\nu^{(\nu)}$ ein Kreis, nämlich der Kreis K_ν mit dem Radius R_ν.

des Hilfssatzes B, 2, daß die Linie $L_n^{(\nu)}$ innerhalb des Kreises mit dem Radius $\tilde{Q}_{\varrho_\nu} \cdot R_{\nu+1}$ enthalten ist, womit auch ϱ'_ν gefunden ist.

Es bleibt jetzt noch die Behauptung e) zu beweisen.

Dazu betrachten wir die Größe $\frac{f_{n+m}(z)}{f_n(z)} \equiv \frac{Z_{n+m}}{Z_n}$ als Funktion von Z_n innerhalb des Kreises K_n mit dem Radius R_n. Die Abschätzung derselben ist zu machen für das Innere der Linie $L_n^{(\nu)}$, welche Linie in dem von n unabhängigen Kreise K_{ϱ_ν} bleibt. Wesentlich ist nun, daß bei unbegrenzt wachsendem n das Verhältnis $\frac{\varrho_\nu}{R_n}$ unendlich klein wird, ferner die Bemerkung, daß $\frac{Z_n}{Z_{n+m}}$ für $|Z_n| \leqq R_n$ unterhalb $\frac{R_n}{\tilde{q} R_n}$ bleibt, schließlich, daß der Wert dieser Größe im Punkte $Z_n = 0$ gleich 1 ist. Die Anwendung des Satzes 2 (Zusatz 2) des § 6 auf die betrachtete Funktion ergibt somit, daß der Wertevorrat dieser Funktion im Kreise K_{ϱ_ν}, bei unbegrenzt wachsendem n, gleichmäßig auf den einen Wert 1 zusammenschrumpft.

Hiermit ist die Behauptung [B] ebenfalls vollständig bewiesen und damit der Beweis des allgemeinen Fundamentalsatzes der konformen Abbildung vollendet.

§ 8. Andere Durchführung des Abbildungsbeweises im Falle B.

Den Abbildungsbeweis wollen wir nunmehr im Falle [B] [$\lim_{n=\infty} R_n = \infty$] noch in einer andern Form führen, welche sich noch enger an meine alte Methode (Gött. Nachr., 1907) anschließt*). Der wesentliche Unterschied gegenüber dem vorstehenden Beweise besteht dabei in dem Übergange von den Funktionen $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots$ zu den reziproken Größen

$$(*) \qquad \frac{1}{f_1(z)}, \frac{1}{f_2(z)}, \frac{1}{f_3(z)}, \ldots .$$

Wir gehen darauf aus, die Konvergenz dieser neuen Funktionenfolge darzutun. Die Funktion $\frac{1}{f_n(z)}$ vermittelt eine konforme Abbildung des Bereichs B_n auf das den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthaltende Äußere eines Kreises vom Radius $\frac{1}{R_n}$.

---

*) Vergl. auch die Darstellung bei *J. Plemelj:* „Die Grenzkreisuniformisierung der analytischen Gebilde“ in den Monatsheften Math. Phys. Bd. 23 (1912).

Wir nehmen wieder Bezug auf den Hilfssatz B, 1 (Seite 89), beweisen denselben jedoch von neuem und zwar ohne Zuhilfenahme einer zweiblätterigen *Riemann*schen Fläche. Wir betrachten dazu die Funktion $\frac{1}{\varphi(z)}$. Dieselbe wird im Punkte $z=0$ unendlich wie $\frac{1}{z}$, wobei das konstante Glied α in der Entwicklung im allgemeinen nicht gleich Null sein wird. Für die Funktion $F(z)=\frac{1}{\varphi(z)}-\alpha$ treffen dann die Voraussetzungen des Hilfssatzes von Seite 79 zu, wobei $R=1$ zu setzen ist. Dem erwähnten Hilfssatze zufolge bleibt nun $\frac{1}{\varphi(z)}-\alpha$ auf der Peripherie des Einheitskreises unterhalb 5, mithin die Schwankung der Funktion $\frac{1}{\varphi(z)}$ selbst auf dem Einheitskreise unterhalb 10. Daraus ergibt sich bei Berücksichtigung des Umstandes, daß der Einheitskreis $|z|=1$ durch $\frac{1}{\varphi(z)}$ offenbar auf eine den Nullpunkt umschlingende Linie abgebildet wird, die Folgerung, daß auch der absolute Betrag der Funktion $\frac{1}{\varphi(z)}$ für $|z|=1$ unterhalb 10 bleibt, so daß

$$|\varphi(z)|>\frac{1}{10} \text{ für } |z|=1$$

gefunden wird. D. h.: Die Begrenzungslinie des durch Abbildung mittels $\varphi(z)$ sich ergebenden Bildbereiches Φ der Fläche des Einheitskreises bleibt vom Nullpunkte mindestens im Abstande $\frac{1}{10}$*) q. e. d.

Die Anwendung des somit bewiesenen Hilfssatzes B, 1 auf die im Kreise $|Z_n|\leqq R_n$ definierte Funktion $Z_{n+m}(Z_n)$, $[m\geqq 0]$, ergibt nunmehr

---

*) Eine von mir früher ausgesprochene, jedoch für uns hier nicht weiter in Betracht kommende Vermutung, daß die Begrenzungslinie des Bereichs Φ mindestens im Abstande $\frac{1}{4}$ vom Nullpunkte bleibt und daß diese Grenze dann und nur dann erreicht wird, wenn der Bereich Φ die vom Punkte $+\frac{1}{4}$ nach $+\infty$ längs der Achse des Reellen aufgeschlitzte Ebene darstellt, ist inzwischen von Herrn *Bieberbach* voll bestätigt worden. S. dessen Artikel in Math. Ann. Bd. 77 sowie Sitzungsber. Berl. Ak. 6. Juli 1916; desgl. *Gronwall*, Pariser C.R., zwei Noten Februar 1916, *G. Pick*, Leipz. Ber. 6. März 1916, *G. Faber*, Münch. Berichte 1916.

sofort, daß die Linie $L_{n+m}^{(n)}$ vom Nullpunkte einen Abstand hat, welcher oberhalb $\frac{R_n}{10}$ bleibt, so daß nun die Funktion $\frac{1}{f_{n+m}(z)}$, $[m \geqq 0]$ auf der Linie L_n, d. i. auf der Begrenzungslinie des Bereichs B_n, dem absoluten Betrage nach unterhalb $\frac{10}{R_n}$ bleibt. Wir finden so als auf L_n gültig die Abschätzung

$$(**) \qquad \left|\frac{1}{f_{n+m}(z)} - \frac{1}{f_n(z)}\right| \leqq \left|\frac{1}{f_{n+m}(z)}\right| + \left|\frac{1}{f_n(z)}\right| \leqq \frac{20}{R_n}.$$

Diese Abschätzung der Differenz $\left(\frac{1}{f_{n+m}(z)} - \frac{1}{f_n(z)}\right)$ gilt jetzt aber sofort auch für das ganze Innere des Bereichs B_n und also auch für jeden festen Bereich B_ν, $[\nu < n]$, wegen der Regularität der genannten Differenzfunktion in diesem Bereiche einschließlich der gemeinschaftlichen Unstetigkeitsstelle der Funktionen $\frac{1}{f_{n+m}(z)}$ und $\frac{1}{f_n(z)}$. Nun ist aber $\lim_{n=\infty} R_n = \infty$. Daher ergibt sich aus der Formel (**) die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge (*) gegen eine Grenzfunktion, welche im Punkte O ebenso wie die Näherungsfunktionen unendlich wird, nämlich wie $\frac{1}{z}$ + reg. Funkt.

Die Grenzfunktion leistet somit, ebenso wie die Näherungsfunktionen, eine Abbildung des ganzen Bereichs B auf einen schlichten Bereich, welcher den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthält. Die vollständige Begrenzung dieses schlichten Bereichs wird nur von einem Punkte, nämlich dem Nullpunkte, gebildet. Denn es gilt für die Grenzfunktion ebenso wie für die Näherungsfunktionen die Bemerkung, daß ihre Werte auf L_ν dem absoluten Betrage nach unterhalb $\frac{10}{R_\nu}$ bleiben, welche Größe mit unbegrenzt wachsendem ν unendlich klein wird.

Damit ist, wenn jetzt der Übergang zum reziproken Werte der Grenzfunktion gemacht wird, die Abbildung des Bereichs B auf die ganze Ebene gewonnen.

§ 9. Konforme Abbildung der Oberfläche einer körperlichen Ecke als Anwendung des Fundamentalsatzes.

Herr *Schwarz* hat in seiner Abhandlung „über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und

Unstetigkeitsbedingungen“ auf das Problem hingewiesen, die Oberfläche einer von endlich vielen regulären analytischen Flächenstücken gebildeten körperlichen Ecke eineindeutig und konform, im Eckpunkt E selbst stetig auf die schlichte Fläche eines Kreises in der Z-Ebene abzubilden, wobei dem Eckpunkte etwa der Nullpunkt entsprechen möge.

Die einzelnen an der Bildung der Ecke beteiligten, über den Punkt E hinaus durchaus regulär fortgesetzt zu denkenden Flächenstücke mögen der Reihe nach mit $F_1, F_2, \ldots, F_n$ bezeichnet werden. Diese Flächenstücke nehmen jedoch jede nur zu einem gewissen Teil an der Bildung der Oberfläche der abzubildenden körperlichen Ecke teil. Diese Teile mögen mit $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bezeichnet werden. Die Kanten der körperlichen Ecke seien der Reihe nach mit $k_1, k_2, \ldots, k_n$ bezeichnet. Und zwar mögen in k_1 die Flächen f_n und f_1, in k_2 die Flächen f_1 und f_2 usw., in k_n die Fläche f_{n-1} und f_n zusammenstoßen. Die Winkel, welche die Flächen F in ihrer zyklischen Aufeinanderfolge miteinander bilden, mögen im Eckpunkte E und daher auch in seiner Nähe sämtlich von Null verschieden vorausgesetzt werden, so daß bezüglich des regulären Charakters der Linien k auch über die Ecke E hinaus keine Zweifel bestehen. Die Winkel, welche die Kanten k in ihrer zyklischen Reihenfolge im Punkte E miteinander bilden, wollen wir ebenfalls von Null verschieden oder wenigstens in ihrer Summe als von Null verschieden voraussetzen. Wir können annehmen, daß die erwähnten Flächenstücke F sämtlich in der von uns betrachteten Ausdehnung eineindeutig und konform auf die schlichte z-Ebene abgebildet werden können. Dies kommt nur auf eine Beschränkung der Betrachtung auf eine hinreichend kleine Nachbarschaft des Eckpunktes E hinaus, wodurch das Wesentliche unseres Problems der Eckenabbildung nicht geändert wird.

Auf Grund der gestellten Voraussetzungen ist es möglich, die Flächen $F_k[k = 1, 2, \ldots, n]$ jede eineindeutig und konform auf die schlichte z-Ebene abzubilden, wobei angenommen werde, daß das Vergrößerungsverhältnis im Punkte E den Wert 1 hat. Bei diesen Abbildungen gehen die winkelraumartigen Flächenstücke f_k in schlichte Winkelräume φ_k gleicher Öffnung mit ihrem Original über. Die etwa vom Nullpunkte ausgehend vorgestellten Seiten dieser φ_k mögen der Reihe nach mit

$$\sigma_1^{(1)}, \sigma_1^{(2)};\ \sigma_2^{(1)}, \sigma_2^{(2)}, \ldots;\ \sigma_n^{(1)}, \sigma_n^{(2)}$$

bezeichnet werden. Dabei sind nun die Seitenpaare $\sigma_k^{(2)}$, $\sigma_{k+1}^{(1)}$ $[k=1, \ldots, n-1]$ und $\sigma_n^{(2)}$, $\sigma_n^{(1)}$ je durch eine reguläre analytische Transformation aufeinander bezogen. Diese Transformationen $S_k[k=1, \ldots, n]$ haben die Form

$$z' = a^{(k)} z + b^{(k)} z^2 + \cdots \qquad (|a^{(k)}| = 1).$$

Nunmehr wenden wir der Reihe nach folgende Transformationen an

auf die Fläche φ_1 die Transformation $S_1 S_2 \ldots S_{n-1}$,
„ „ „ φ_2 „ „ $S_2 S_3 \ldots S_{n-1}$,
. . . . . .
auf die Fläche φ_{n-1} die Transformation S_{n-1}.

Durch die Aufeinanderfolge der S-Symbole wird hierbei die Vornahme der damit bezeichneten Substitionen nacheinander angedeutet. Das Resultat ist, daß die aus $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ auf diese Weise gewonnenen neuen Flächenstücke $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$, mit φ_n zusammen, ein einziges Flächenstück Φ bilden, welches sich als ein Winkelraum darstellt, mit einem Öffnungswinkel, gleich der Summe der Öffnungswinkel aller φ, d. i. gleich der Summe der Öffnungswinkel aller f. Die beiden begrenzenden, vom Nullpunkte auslaufenden Seiten des Flächenstückes Φ mögen mit s_1 und s_2 bezeichnet werden. Von diesen beiden Seiten ist s_2 mit $\sigma_n^{(2)}$ identisch. Die beiden Seiten s_1 und s_2 erscheinen nun ihrerseits, und zwar s_1 auf s_2, durch eine reguläre analytische Transformation der Form

$$z' = az + bz^2 + \cdots \qquad (|a| = 1)$$

aufeinander bezogen, d. i. durch die Umkehrung der Transformation $S_n S_1 S_2 \ldots S_{n-1}$; vgl. Fig. 8. Die Fläche Φ ist ein Abbild der längs der Kante k_n aufgeschnitten zu denkenden Oberfläche der körperlichen Ecke. Diese Abbildung ist nun offenbar nicht nur in den gewöhnlichen Punkten der Oberfläche durchaus konform, sondern sie bewahrt auch die Konformität längs der Kanten. Hierbei verstehen wir unter dem von zwei Linien l_1 und l_2, die, von einem Kantenpunkte P ausgehend, auf der Oberfläche der körperlichen Ecke verlaufen, gebildeten Winkel diesen Winkel im gewöhnlichen Sinne, wenn der betreffende Winkelraum ganz *einer* der beiden an die Kante anschließenden Flächen f angehört, im andern Falle die Summe der beiden auf diesen Flächen einzeln gebildeten Winkel, indem dieser Winkel dabei

Fig. 8.

zerlegt wird in zwei Teile durch Vermittlung einer dritten Linie, nämlich der von P in der einen Richtung zu durchlaufenden Kante k.

Wir bestimmen auf der Begrenzungsseite s_1 des Bereichs Φ eine unendliche Folge von Punkten $z_1', z_2', z_3', \ldots$, die gegen den Nullpunkt, d. i. gegen den Eckpunkt des Bereichs Φ konvergiert. Dasselbe findet dann für die Folge $z_1'', z_2'', z_3'', \ldots$ ihrer Bildpunkte statt, welche sich vermöge der s_1 in s_2 überführenden analytischen Transformation auf s_2 ergeben. Nunmehr konstruieren wir die geradlinigen Verbindungsstrecken von z_1' nach z_1'', von z_1'' nach z_2', von z_2' nach z_2'', von z_2'' nach z_3' usw., indem wir zunächst einmal annehmen, daß der Öffnungswinkel des Bereichs Φ kleiner als π sei. Hierdurch entsteht eine Parzellierung des nunmehr durch die Strecke $\overline{z_1' z_1''}$ abgegrenzt zu denkenden Bereichs Φ in lauter Dreiecke, vermöge deren dieser Bereich mit seiner analytischen Ränderzuordnung unter den Begriff der *Riemann*schen Mannigfaltigkeit subsumiert werden kann. Diese *Riemann*sche Mannigfaltigkeit bietet allerdings insofern eine kleine unwesentliche Abweichung gegenüber unserer in § 1 gegebenen Formulierung des Allgemeinbegriffs, als das erste Dreieck eine offen bleibende Seite besitzt, nämlich die Seite $\overline{z_1' z_1''}$, die man sich als solche auch wegdenken kann, so daß alsdann der Bereich Φ in der Tat nur innere Punkte haben würde. Das zwischen den Strecken $\overline{z_1' z_1''}$ und $\overline{z_2' z_2''}$ enthaltene Stück des Bereichs Φ müßte demnach, wenn man sich streng an unseren oben formulierten Allgemeinbegriff halten will, einer besonderen Parzellierung in lauter Dreiecke unterworfen werden, welche sich gegen die Grenzstrecke $\overline{z_1' z_1''}$ hin häufen würden.

Wir denken uns nunmehr die Fläche Φ in unendlich vielen Exemplaren gesetzt und nennen diese Exemplare $\Phi^{(k)}$ $[k = \cdots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots]$, ihre Seiten $s_1^{(k)}$ und $s_2^{(k)}$. Diese unendlich vielen Exemplare denken wir uns, in der Reihenfolge der positiven und negativen ganzen Zahlen geordnet, koinzidierend übereinandergelegt und sodann dieselben zu *einem* einfach zusammenhängenden Ganzen $\overset{(\infty)}{\Phi}$ zusammengefaßt, indem wir jedesmal die Seiten $s_1^{(k)}$ und $s_2^{(k-1)}$ durch die für Φ geltende analytiche Seitenzuordnung S einander zuordnen. Der so gewonnene ideale Bereich $\overset{(\infty)}{\Phi}$ ist in der Tat einfach zusammenhängend und bietet den Charakter einer *Riemann*schen Mannigfaltigkeit dar. Wir sind daher in der Lage, nach dem Fundamental-

satze der konformen Abbildung seine konforme Abbildung auf einen schlichten Bereich $\overset{(\infty)}{\Phi'}$ einer ζ-Ebene auszuführen, wobei sich entweder die ganze Ebene oder eine endliche Kreisfläche, die wir uns dann in die Halbebene oberhalb der Achse des Reellen verwandelt denken wollen, ergeben wird. Sehen wir zu, was bei dieser Abbildung aus dem einzelnen Exemplar $\Phi^{(k)}$ wird. Wir behaupten, daß ihm als Bild ein Teilbereich $\Phi'^{(k)}$ innerhalb $\overset{(\infty)}{\Phi'}$ entspricht, von der Beschaffenheit, daß korrespondierende Randpunkte des Bereichs $\Phi^{(k)}$ auch bei $\Phi'^{(k)}$ als korrespondierende Randpunkte erscheinen, wobei jedoch jetzt die Randsubstitution S' eine *lineare* Substitution ist, durch welche der ganze Bereich $\overset{(\infty)}{\Phi'}$ eineindeutig auf sich selbst abgebildet wird.

Man hat, um dies einzusehen, folgendes zu beachten. Es seien $z_1^{(k)}$ und $z_2^{(k)}$ zwei einander vermöge S entsprechende Punkte auf den begrenzenden Seiten $s_1^{(k)}$ und $s_2^{(k)}$ des Bereichs $\Phi^{(k)}$. Alsdann ist für die Auffassung der Fläche $\overset{(\infty)}{\Phi}$ als *Riemann*scher Mannigfaltigkeit, der Punkt $z_2^{(k)}$ gleichwertig mit dem Punkte $z_1^{(k+1)}$, und man kann demnach die Frage so wenden: Was für eine Beziehung entspricht der Zuordnung der Punkte $z_1^{(k)}$ und $z_1^{(k+1)}$ in der ζ-Ebene? Dazu bemerken wir, daß die Zuordnung der Punkte $z_1^{(k)}$ und $z_1^{(k+1)}$ aufgefaßt werden kann als Ausschnitt aus der allgemeinen Punktezuordnung $z^{(k)}$, $z^{(k+1)}$, unter $z^{(k)}$ und $z^{(k+1)}$ irgend zwei übereinander liegende Punkte der Bereiche $\Phi^{(k)}$ und $\Phi^{(k+1)}$ verstanden, und diese Zuordnung wiederum ihrerseits erweitert werden kann zu der über die ganze Fläche $\overset{(\infty)}{\Phi}$ ausgedehnten Zuordnung $z^{(k)}$, $z^{(k+1)}$ $[k = \cdots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots]$.

Die letztere Zuordnung nun überträgt sich in die ζ-Ebene als eine eineindeutige konforme Abbildung des Bereichs $\overset{(\infty)}{\Phi'}$ auf sich selbst, wobei innerhalb $\overset{(\infty)}{\Phi'}$ kein Fixpunkt dieser Substitution liegen kann. Diese ζ-Substitution ist nun aber linear und kann im Falle der ganzen Ebene in der Gestalt $\zeta' = \zeta + c$, im Falle der Halbebene entweder in der Form $\zeta' = \zeta + c$ oder in der Form $\zeta' = c\,\zeta$ angenommen werden, wobei c in beiden Fällen eine reelle Größe ist.

Wir erkennen auf diese Weise, daß der Bereich $\Phi^{(k)}$, bei der betrachteten Abbildung des idealen Bereichs $\overset{(\infty)}{\Phi}$ auf die ζ-Ebene, seinerseits in

einen schlichten Bereich $\Phi'^{(k)}$ übergeht, dessen als Bilder der Seiten $s_1^{(k)}$ und $s_2^{(k)}$ sich ergebende Begrenzungsseiten durch eine der oben genannten Substitutionen auf einander bezogen erscheinen.

Nunmehr machen wir im Falle der Substitution $\zeta' = \zeta + c$ mit dem Bereiche $\Phi'^{(k)}$ die Abbildung $Z = e^{\frac{2\pi i}{c}\zeta}$, im Falle der Substitution $\zeta' = c \cdot \zeta$ die Abbildung $Z = \zeta^{\frac{2\pi i}{\log c}} \equiv e^{\frac{2\pi i}{\log c}\log\zeta}$, wodurch der Bereich $\Phi'^{(k)}$ in eine von zwei konzentrischen Kreisen, die sich auch auf Punkte reduzieren können, begrenzten, längs eines Querdurchschnitts Q aufgeschnitten zu denkende Ringfläche R in der Z-Ebene übergeht. Setzen wir $k = 0$ und fassen $\Phi^{(0)}$ als identisch mit dem Bereiche Φ selbst auf, von welchem ausgegangen worden ist, so möge der äußere Begrenzungskreis des Ringes R der Begrenzungsstrecke $\overline{z_1' z_1''}$ des Bereichs Φ, der innere Begrenzungskreis dem Eckpunkte des Bereichs Φ entsprechen.

Daß der äußere Begrenzungskreis sich nicht auf einen Punkt, d. i. auf den unendlich fernen Punkt reduzieren kann, ergibt sich aus der Bemerkung, daß andernfalls die Größe $\frac{1}{Z}$ im Bereiche Φ, als Funktion von z betrachtet, eine Funktion darstellen würde, welche längs der Strecke $\overline{z_1' z_1''}$ gleichmäßig in den Wert Null übergeht, sodaß diese Funktion sich überhaupt auf eine Konstante, nämlich die Null, reduzieren müßte.

Daß andererseits der innere Begrenzungskreis ein Punkt sein muß und daß folglich die gefundene Abbildung der Oberfläche der körperlichen Ecke auf die Z-Ebene im Eckpunkte E der körperlichen Ecke stetig ist, erfordert eine besondere Untersuchung, welche wir nun durchführen. Es kommt dies darauf hinaus, die Stetigkeit der Funktion $Z(z)$ im Eckpunkte des Bereichs Φ, d. i. im Punkte $z = 0$ darzutun.

Die Funktion $Z = f(z)$ bleibt gegenüber der analytischen Transformation S, d. i. gegenüber der Randsubstitution des Bereichs Φ, ungeändert, und wir können demgemäß ihren Verlauf über die Begrenzungsseiten s_1 und s_2 des Bereichs Φ hinaus bestimmen. Durch die Transformation S und ihre Inverse werden dem Bereiche Φ gewisse Nachbarbereiche Φ_1 und Φ_2 nebengelagert, deren Winkelöffnung derjenigen des Bereichs Φ gleich ist. Die Bezeichnung sei etwa so gewählt, daß Φ_1 an s_1 und Φ_2 an s_2 anschließt. Die Ausübung der Transformation selbst bietet keine

Schwierigkeit, sofern wir uns von vornherein bei Betrachtung der Ecke auf eine genügende Nähe des Eckpunktes E selbst beschränkt haben. Wir bezeichnen mit Σ den Bereich, welcher aus den Bereichen Φ_1, Φ, Φ_2 zusammengesetzt ist.

Wir wollen nun annehmen, der innere Begrenzungskreis des Ringes R reduziere sich nicht auf einen Punkt. Alsdann können wir, vermöge einer ev. einzuführenden ähnlichen Vergrößerung annehmen, daß er sich auf den Einheitskreis reduziert. Die Funktion $f(z)$ wird nun in Σ unterhalb einer endlichen Schranke bleiben und sich dem absoluten Betrage ihrer Werte nach auf den Wert 1 reduzieren, wenn wir uns im Bereiche Φ gleichmäßig dem Nullpunkte nähern, etwa dadurch, daß wir in Φ uns beschränken auf den von der geradlinigen Verbindungsstrecke $\overline{z_n' z_n''}$ begrenzten Abschnitt dieses Bereichs und nun n unendlich groß werden lassen.

Wir teilen die Strecke $\overline{z_n' z_n''}$, deren Länge l_n sei, in h gleiche Teile, und zwar bestimmen wir die Anzahl h unabhängig von n so, daß die mit dem Radius $2\frac{l_n}{h}$ um jeden der Teilpunkte als Mittelpunkt konstruierte Kreisfläche ganz innerhalb Σ verläuft. Eine solche Bestimmung der endlichen von n unabhängigen ganzen Zahl h ist offenbar möglich, man beachte dass die Linie s_1 und s_2 ja bestimmte Tangenten im Nullpunkte haben, welche einen von Null verschiedenen Winkel miteinander bilden. Ferner beachte man, daß die Möglichkeit dieser Bestimmung wesentlich an den Umstand gebunden ist, daß das Verhältnis $\frac{|z_n''|}{|z_n'|}$ einem festen endlichen Grenzwerte, hier speziell dem Werte 1 zustrebt. Jetzt haben wir nur nötig, die Linie $\overline{z_n' z_n''}$ mit h Kreisflächen, deren Mittelpunkte die erwähnten Teilpunkte sind und deren Radien gleich $2\frac{l_n}{h}$ sind, zu überdecken, und können nun beweisen, daß in jeder dieser Kreisflächen die Schwankung der Funktion $f(z)$ gleichmäßig unendlich klein wird, wenn n unendlich groß wird, bei Beschränkung der Variabilität der Größe z auf je eine konzentrische Kreisfläche mit dem halben Radius, das ist mit dem Radius $\frac{l_n}{h}$. In der Tat wird dann offenbar die Schwankung der Funktion $f(z)$ auf der ganzen Linie $\overline{z_n' z_n''}$ ebenfalls unendlich klein werden müssen, wenn n unendlich groß wird, während doch andererseits im Widerspruch hiermit

die Bildkurve der Linien $\overline{z_n' z_n''}$ eine den Einheitskreis umschließende geschlossene Linie ist, so daß Schwankungen von einer Größe oberhalb 2 vorkommen.

Daß wirklich die zu untersuchende Schwankung der Funktion $f(z)$ in jenen Kreisflächen unendlich klein wird, ist unmittelbar klar, nach dem Satze 2 Zusatz 1 (§ 6), insofern als die Funktion $f(z)$ bei genügend großem n dem absoluten Betrage nach unterhalb einer Größe Q der Form $1+\varepsilon$ bleibt, wobei ε unendlich klein wird und der Wert dieser Funktion im Mittelpunkt des Kreises einen absoluten Betrag von der Form $1+\varepsilon'$ hat, wobei $0<\varepsilon'<\varepsilon$ ist.

Damit ist nun ein Widerspruch aufgezeigt, der nur durch die Annahme vermieden wird, daß der innere Begrenzungskreis des Kreisringes R sich auf einen Punkt, nämlich den Nullpunkt, reduziert, daß mithin die Abbildung des Bereichs Φ und damit der Oberfläche der gegebenen körperlichen Ecke in der Tat im Eckpunkt E selbst noch stetig ist.

Wir hatten oben angenommen, daß der Öffnungswinkel des Bereichs Φ kleiner als π sei, um direkt mit geradlinigen Verbindungsstrecken $\overline{z_n' z_n''}$ arbeiten zu können. Nun übersieht man aber ohne weiteres, welche selbstverständliche Modifikation in dem Falle vorzunehmen ist, daß der Öffnungswinkel des Bereichs Φ größer oder gleich π ist. Man wird den Winkelraum durch endlich viele vom Nullpunkte ausgehende geradlinige Strahlen in Teilwinkelräume zerlegen, deren Öffnungen sämtlich kleiner als π sind, auf dem einzelnen Strahle (k) hat man sich dann ein System von Hilfspunkten $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, z_3^{(k)}, \ldots$ zu wählen, die gegen den Nullpunkt konvergieren und der Bedingung genügen, daß $\lim \frac{|z_n^{(k)}|}{|z_n'|}$ als endlicher, von Null verschiedener Grenzwert existiert, was z. B. durch die Annahme $|z_n^{(k)}| = |z_n'|$ erreicht wird. Darauf hat man in jedem Teilwinkelraum die Parzellierung mit geradlinigen Verbindungsstrecken wie oben durchzuführen. Die Linien $\overline{z_n' z_n''}$, mit welchen wir oben die gleichmäßige Annäherung an den Nullpunkt vollzogen, in dem wir n über alle Grenzen hinaus wachsen ließen, werden jetzt zu ersetzen sein durch die Streckenzüge $z_n' z_n^{(1)} z_n^{(2)} \ldots z_n^{(k)} \ldots z_n^{(\tau)} z_n''$, wenn τ die Anzahl der benutzten geradlinigen Hilfsstrahlen ist. Im übrigen verläuft der Beweis ohne Besonderheit gegenüber dem oben gegebenen.

§ 10. Eine Erweiterung des Eckenabbildungs-Problems.

Wir bemerken zum Schluß, daß es bei der abzubildenden Ecke Φ mit von Null verschiedenem Öffnungswinkel und mit den durch eine analytische Transformation der Form

$$z' = az + bz^2 + \cdots$$

zugeordneten Seiten s_1 und s_2 nichts ausmachen würde, wenn wir annehmen, daß der erste Koeffizient a nicht den absoluten Betrag 1 hat, sondern vielmehr beliebig, jedoch von Null verschieden ist. Auch in diesem weiter gehenden Falle liefert unsere Methode ohne besondere Modifikation eine Abbildung des Bereichs Φ auf die schlichte volle Umgebung eines Punktes der Z-Ebene in der Weise, daß je zwei einander zugeordneten Randpunkten des Bereichs Φ in der Abbildung koinzidierende Punkte entsprechen.

Das so behandelte Problem wollen wir zum Schlusse noch besonders formulieren.

Satz: Es sei Φ ein schlichter oder jedenfalls endlich-vielblätteriger Winkelraum in der z-Ebene, mit von Null verschiedener Öffnung. Der Eckpunkt dieses Winkelraumes werde mit dem Punkt $z = 0$ zusammenfallend angenommen. Die begrenzenden Seiten des Winkelraumes s_1 und s_2 seien reguläre analytische Linienstücke, deren Regularität auch noch im Punkte $z = 0$ selbst besteht. Diese Seiten seien durch eine reguläre analytische Transformation der Form

$$z' = az + bz^2 + cz^3 + \cdots$$

aufeinander bezogen, wobei a als von Null verschieden vorausgesetzt wird. Alsdann ist es möglich, im Bereiche Φ eine reguläre, im Eckpunkte jedenfalls stetige analytische Funktion $Z = f(z)$ zu bestimmen, durch deren Vermittlung der Bereich Φ eineindeutig auf die volle schlichte Umgebung des Nullpunktes der Z-Ebene abgebildet wird in der Weise, daß je zwei einander zugeordneten Randpunkten des Bereichs Φ in der Z-Ebene koinzidierende Bildpunkte entsprechen. Die erwähnte volle Umgebung der Stelle $Z = 0$ erscheint demnach längs eines Einschnittes s vom Nullpunkte aus aufgeschnitten, welcher das Bild der Linien s_1 und s_2 darstellt.

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
Einleitung		67
§ 1.	Begriff der *Riemann*schen Mannigfaltigkeit	70
§ 2.	Formulierung des Fundamentalsatzes und erste Bemerkungen zu seinem Beweise	73
§ 3.	Durchführung der Kreisscheibenadjunktion. Abbildung gewöhnlicher endlich-vielblättriger Bereiche	75
§ 4.	Abbildung des geschlossenen einfach zusammenhängenden Bereichs	77
§§ 5—7.	Abbildung des allgemeinsten offenen Bereichs	83
§ 5.	Ansatz und Einteilung der Beweisführung	83
§ 6.	Hilfssätze	85
§ 7.	Durchführung des Abbildungsbeweises (Fall A und Fall B)	91
§ 8.	Andere Durchführung des Abbildungsbeweises im Falle B	93
§ 9.	Konforme Abbildung der Oberfläche einer körperlichen Ecke als Anwendung des Fundamentalsatzes	95
§ 10.	Eine Erweiterung des Eckenabbildungs-Problems	103

Konjugierte Punkte und Enveloppen bei speziellen Variationsproblemen.

Von Herrn *Lothar Koschmieder* in Breslau.

Die einfachste Aufgabe der Variationsrechnung ist folgende. Gegeben sei eine Funktion $F(x, y, x', y')$ der Veränderlichen x, y, x', y'; dann soll, wenn t einen Parameter bedeutet, das Integral

$$I = \int F(x, y, x'. y')\, dt$$

einen extremen Wert erhalten durch passende Wahl des funktionalen Zusammenhangs zwischen x und t, y und t. Diese Wahl hat so zu erfolgen, daß x und y als Funktionen von t den *Euler*schen Differentialgleichungen

$$F_x - \frac{dF_{x'}}{dt} = 0,$$

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dt} = 0^*)$$

genügen. Die Lösungen dieser Differentialgleichungen zweiter Ordnung enthalten zwei willkürliche Konstanten a, b, haben also die Form

$$x = \xi\,(t, a, b),$$
$$y = \eta\,(t, a, b);$$

diese Kurven heißen die Extremalen des Integrals I. $P_1 P_2$ sei ein Extremalenbogen, auf dem der Parameter t von t_1 bis t_2 wächst. Damit er wirklich dem Integrale I einen extremen Wert erteile gegenüber allen andern P_1 und P_2 verbindenden Kurven, ist weiter notwendig**), daß die Deter-

*) *Kneser*, Lehrbuch der Variationsrechnung. Braunschweig 1900. § 8.

**) Ebenda § 31.

minante

$$D(t_1, t) = \mathfrak{D}_1(t)\mathfrak{D}_2(t_1) - \mathfrak{D}_2(t)\mathfrak{D}_1(t_1) \neq 0$$

sei für

$$t_1 < t \leqq t_2,$$

wo

$$\mathfrak{D}_1(t) = \xi_t(t, a, b)\eta_a(t, a, b) - \xi_a(t, a, b)\eta_t(t, a, b),$$
$$\mathfrak{D}_2(t) = \xi_t(t, a, b)\eta_b(t, a, b) - \xi_b(t, a, b)\eta_t(t, a, b)$$

ist. Die Lösung

$$t = t_1'$$

der Gleichung

$$D(t_1, t) = 0,$$

die von t_1 verschieden ist, bestimmt, wenn sie existiert, den zu P_1 konjugierten Punkt P_1'. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter durch P_1 gehender Extremalen.

Die Gleichung der Schar von Extremalen, die von einer gegebenen Kurve $\mathfrak{C}$ ausgehen, hat die Form

$$x = \xi(t, a),$$
$$y = \eta(t, a);$$

sie enthält nur noch eine willkürliche Konstante, weil zu den *Euler*schen Differentialgleichungen als neue notwendige Bedingung des Extremums die der transversalen Lage der Extremale zu der Kurve $\mathfrak{C}$ hinzukommt*),

$$F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y\,|^{\mathfrak{C}} = 0,$$

und eine Beziehung zwischen den beiden ursprünglich vorhandenen Konstanten a, b festlegt. Damit ein von der Kurve $\mathfrak{C}$ in P_1 ausgehender Extremalenbogen P_1P_2, längs dessen der Parameter t von t_1 bis t_2 wächst, das Integral I wirklich zum Extremum mache, muß die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \xi_t\eta_a - \xi_a\eta_t \neq 0$$

sein für

$$t_1 < t \leqq t_2.$$

Hat die Gleichung

$$\Delta = 0$$

eine Lösung t_1', so bestimmt diese den extremalen Brennpunkt P_1' der Kurve $\mathfrak{C}$. Dieser durchläuft, wenn a sich ändert, die Enveloppe der von

*) *Kneser*, Lehrbuch der Variationsrechnung. § 10.

$\mathfrak{C}$ ausgehenden Extremalenschar. Es seien $0, \bar{0}$ zwei verschiedene Lagen des Punktes P_1 auf der Kurve $\mathfrak{C}$, 1, 2 zwei nicht singuläre Punkte der Enveloppe: Der Extremalenbogen $\bar{0}2$ liefert kein Extremum des Integrals I mehr, denn es ist

$$\bar{I}_{01} + I_{12} = \bar{I}_{\bar{0}2};$$

die überstrichenen Integrale sind längs der Extremalen 01 und $\bar{0}2$, I_{12} ist längs des Stückes 12 der Enveloppe zu bilden*).

Für den Fall, daß die Extremalen alle durch einen festen Punkt P_1 gehen, leitet man die entsprechenden Ergebnisse her, indem man die Kurve $\mathfrak{C}$ in den Punkt P_1 zusammenschrumpfen läßt. Die erste auf t_1 folgende Nullstelle t_1' der Determinante

$$\Delta = \xi_t \eta_a - \xi_a \eta_t$$

liefert den zu P_1 konjugierten Punkt P_1'**).

Bei der nächst schwierigeren Aufgabe der Variationsrechnung, der isoperimetrischen Aufgabe, sind x und y als Funktionen des Parameters t so zu bestimmen, daß das Integral

$$I = \int F(x, y, x', y')\, dt$$

einen extremen Wert annimmt, während ein anderes Integral

$$K = \int G(x, y, x', y')\, dt$$

einen vorgeschriebenen Wert hat. Wenn λ eine endliche, von Null verschiedene Konstante bedeutet und

$$F + \lambda G = H$$

gesetzt wird, so müssen hier x und y als Funktionen von t den Differentialgleichungen

$$H_x - \frac{dH_{x'}}{dt} = 0,$$

$$H_y - \frac{dH_{y'}}{dt} = 0^{***})$$

genügen. Die Lösungen dieser Differentialgleichungen zweiter Ordnung enthalten außer den beiden Integrationskonstanten noch die isoperimetrische Konstante λ, haben also die Form

---

*) *Kneser*, Lehrbuch der Variationsrechnung. §§ 24, 25.

**) Ebenda § 25.

***) Ebenda § 32.

$$x = \xi(t, a, b, \lambda),$$
$$y = \eta(t, a, b, \lambda).$$

Diese Kurven heißen wieder die Extremalen des Variationsproblems.

Die Gleichung der Schar von Extremalen, die von einer gegebenen Kurve $\mathfrak{C}$ ausgehen, enthält nur zwei willkürliche Konstanten, weil die Transversalitätsbedingung

$$H_{x'}\,\delta x + H_{y'}\,\delta y\,|^{\mathfrak{C}} = 0$$

als neue notwendige Bedingung des Extremums*) eine Beziehung zwischen den drei ursprünglich vorhandenen Konstanten a, b, λ liefert. Die Gleichung der Doppelschar von Extremalen sei

$$x = \xi(t, a, b),$$
$$y = \eta(t, a, b),$$

ferner

$$K = \omega(t, a, b)$$

der Wert des isoperimetrischen Integrals, auf einer Extremalen von ihrem Schnittpunkte P_1 mit der Kurve $\mathfrak{C}$, dem der Parameterwert t_1 entspreche, bis zu einem beliebigen ihrer Punkte mit dem Parameterwerte t ausgerechnet. Damit ein Extremalenbogen P_1P_2, längs dessen der Parameter t von t_1 bis t_2 wächst, wirklich dem Integrale I einen extremen Wert erteile mit der isoperimetrischen Nebenbedingung, muß die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_t & \xi_a & \xi_b \\ \eta_t & \eta_a & \eta_b \\ \omega_t & \omega_a & \omega_b \end{vmatrix} \neq 0$$

sein für

$$t_1 < t \leqq t_2.$$

Ist eine von t_1 verschiedene Lösung t_1' der Gleichung

$$\Delta = 0$$

vorhanden, so bestimmt sie den extremalen Brennpunkt der Kurve $\mathfrak{C}$.

Man greift jetzt aus der Doppelschar transversaler Extremalen eine einfache so heraus, daß die Enveloppe dieser Schar jede Extremale in dem Brennpunkte der Kurve $\mathfrak{C}$ berührt. Es seien wieder $0, \bar{0}$ zwei verschiedene Lagen des Punktes P_1 auf der Kurve $\mathfrak{C}$, $1, 2$ zwei nicht singuläre Punkte der Enveloppe; dann drücken die beiden in diesem Falle bestehenden Gleichungen

*) *Kneser*, Lehrbuch der Variationsrechnung. § 39.

$$\bar{I}_{01} + I_{12} = \bar{I}_{\bar{0}2},$$
$$\bar{K}_{01} + K_{12} = \bar{K}_{\bar{0}2}$$

das Aufhören des Extremums aus*).

Für den Fall, daß die Extremalen alle durch einen festen Punkt P_1 gehen, gewinnt man wieder die entsprechenden Ergebnisse, indem man die Kurve $\mathfrak{C}$ in den Punkt P_1 zusammenschrumpfen läßt. Die erste auf t_1 folgende Nullstelle t_1' der Determinante Δ bestimmt den zu P_1 konjugierten Punkt P_1'**).

Im folgenden will ich diese allgemeinen Theorien an einer Anzahl von Beispielen veranschaulichen***).

I. Kapitel.

Enveloppen bei der einfachsten Aufgabe der Variationsrechnung.

1. Enveloppen gewisser zu einer Geraden transversaler Extremalen beim Prinzip der kleinsten Aktion,

$$\delta \int \sqrt{U + h}\, ds = 0.$$

§ 1. $\delta \int \sqrt{\frac{\varepsilon}{y^2} + h}\sqrt{1 + p^2}\, dx = 0,\ \varepsilon = \pm 1$†).

Die Gleichung der zweiparametrigen Extremalenschar in rechtwinkligen Koordinaten $x, y\left(p = \frac{dy}{dx}\right)$ lautet

$$\frac{h - c^2}{c}(x - \xi) = \sqrt{\varepsilon + (h - c^2)y^2},$$

sie stellt Kegelschnitte dar††).

Im Falle

$$\varepsilon = +1,\ h = -l,\ l > 0$$

---

*) *Kneser*, Lehrbuch der Variationsrechnung. § 40.

**) Ebenda §§ 36, 40.

***) Eine Reihe anderer Beispiele habe ich in meiner Inauguraldissertation: Anwendung der elliptischen Funktionen auf die Bestimmung konjugierter Punkte bei Problemen der Variationsrechnung, Breslau 1913, behandelt. Im folgenden zitiere ich diese Arbeit kurz mit D.

†) Die Bestimmung der Enveloppe der durch einen festen Punkt gehenden Extremalen ist für dieses Problem von *Kober* durchgeführt (dieses Journal Bd. 140, S. 235 ff.).

††) Damit das Aktionsintegral endlich bleibt, kommt als Bahnkurve entweder nur die oberhalb oder nur die unterhalb der x-Achse verlaufende Hälfte eines Kegelschnitts in Betracht.

sind diese Kegelschnitte Ellipsen. Sie sollen zu einer gegebenen Geraden transversale Lage haben, d. h. sie, wie immer beim Prinzip der kleinsten Aktion, orthogonal durchschneiden. Ist die Gerade eine Parallele zur y-Achse

$$x - \mathfrak{x} = 0, \tag{1.}$$

so liefert die Transversalitätsbedingung

$$\xi = \mathfrak{x},$$

und für die gesuchte einparametrige Ellipsenschar ergibt sich

$$\left(\frac{l+c^2}{c}\right)^2 (x-\mathfrak{x})^2 + (l+c^2)y^2 = 1. \tag{2.}$$

Die Halbachsen und die halbe Brennweite einer Bahnellipse sind

$$\alpha = \frac{c}{l+c^2},\ \beta = \frac{1}{\sqrt{l+c^2}},\ e = \sqrt{\beta^2-\alpha^2} = \frac{\sqrt{l}}{l+c^2}. \tag{3.}$$

Zur Bestimmung des extremalen Brennpunktes der Geraden (1.) geht man am besten von einer Parameterdarstellung der Ellipsen (2.) in der Form

$$\begin{aligned} x &= \mathfrak{x} + \frac{c}{l+c^2}\cos t = \xi(t,c), \\ y &= \frac{1}{\sqrt{l+c^2}}\sin t = \eta(t,c) \end{aligned} \qquad 0 < t < \pi \tag{4.}$$

aus. Dann erhält man für die *Jacobi*sche Determinante

$$\Delta = \xi_t \eta_c - \xi_c \eta_t = (l+c^2)^{-\frac{5}{2}}(c^2 - l\cos t^2). \tag{5.}$$

Einen Brennpunkt gibt es also, da er der ersten reellen positiven Wurzel τ der Gleichung

$$\Delta = 0$$

entspricht, auf allen Extremalen, deren Parameter c die Ungleichung

$$c^2 \leqq l$$

erfüllt. Die Koordinaten des Brennpunkts sind

$$x_1 = \mathfrak{x} + \frac{c}{l+c^2}\cos\tau = \mathfrak{x} + \frac{1}{\sqrt{l}}\frac{c^2}{l+c^2},$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{l+c^2}}\sin\tau = \frac{1}{\sqrt{l}}\sqrt{\frac{l-c^2}{l+c^2}},$$

und die hieraus mit Berücksichtigung von (3.) sich ergebende Beziehung

$$(x_1 - \mathfrak{x})^2 + y_1^2 = e^2 \tag{6.}$$

liefert eine einfache geometrische Konstruktion des Brennpunktes 1 der Geraden $\mathfrak{G}$ auf einer bestimmten Extremale: Er ist deren erster Schnittpunkt mit dem Kreise, den man um den Mittelpunkt der Ellipse mit ihrer

Brennweite schlägt (Fig. 1ª, Maß-Einheit $\frac{2}{3}$ cm, $\mathfrak{x} = 0$, $l = \frac{1}{9}, c^2 = \frac{1}{27}, \frac{5}{81}, \frac{7}{81}$).

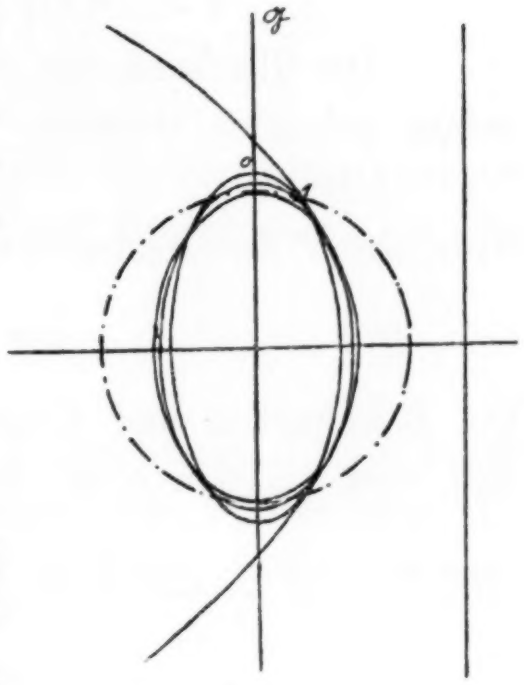

Fig. 1ª.

Der extremale Brennpunkt hat vom Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{G}$ mit der x-Achse nach (6.) die Entfernung e, zufolge der Identität

$$\mathfrak{x} + \frac{1}{\sqrt{l}} - \left(\mathfrak{x} + \frac{1}{\sqrt{l}}\,\frac{c^2}{l + c^2}\right) = \frac{\sqrt{l}}{l + c^2} = e$$

hat er aber auch von der festen Geraden

$$x = \mathfrak{x} + \frac{1}{\sqrt{l}} \tag{7.}$$

die Entfernung e. Beim Übergang von einer Extremale zur andern behält also der Brennpunkt die Eigenschaft, von einem festen Punkte und von einer festen Geraden gleichen Abstand zu besitzen: der geometrische Ort des Brennpunktes, die Enveloppe der Extremalen (4.) ist eine Parabel, deren Brennpunkt der feste Punkt, deren Leitlinie die Gerade (7.) ist; sie hat die Gleichung

$$y^2 = -\frac{2}{\sqrt{l}}\left(x - \mathfrak{x} - \frac{1}{2\sqrt{l}}\right). \tag{8.}$$

Entsprechend ist das Ergebnis im Falle

$$\varepsilon = -1,\ h > 0.$$

Hier gibt es auf jedem der zur Geraden

$$x - \mathfrak{x} = 0$$

senkrechten Hyperbelzweige, deren einfach unendliche Schar durch die Gleichungen

$$x = \mathfrak{x} + \frac{c}{h - c^2}\,\mathfrak{Sin}\,t,$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{h - c^2}}\,\mathfrak{Cof}\,t$$

dargestellt wird, einen extremalen Brennpunkt: Er ist der Schnittpunkt der Extremale mit dem Kreise, den man um den Mittelpunkt der Hyperbel mit ihrer Brennweite schlägt (Fig. 1ᵇ, M.-E. $\frac{2}{3}$ cm, $\mathfrak{x} = 0$, $h = \frac{1}{9}$, $c^2 = \frac{17}{729}, \frac{32}{729}, \frac{45}{729}$).

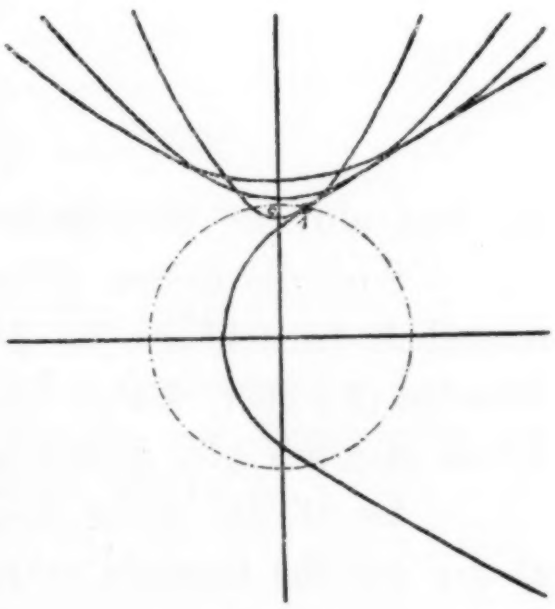
Fig. 1ᵇ.

Die Enveloppe ist die Parabel

$$y^2 = \frac{2}{\sqrt{h}}\left(x - \mathfrak{x} + \frac{1}{2\sqrt{h}}\right).$$

§ 2. $\delta \int \sqrt{\frac{\varepsilon}{r} + h}\, \sqrt{1 + r^2 p^2}\, dr = 0, \quad \varepsilon = \pm 1.$

Die Gleichung der einparametrigen zu einer durch den Koordinatenanfang gehenden Geraden

$$\varphi - \varphi_0 = 0 \tag{1.}$$

senkrechten Extremalenschar ist in Polarkoordinaten $r, \varphi \left(p = \frac{d\varphi}{dr}\right)$

$$r = \frac{2c^2}{\varepsilon + \sqrt{1 + 4hc^2}\cos(\varphi - \varphi_0)}. \tag{2.}$$

Die Bahnkurven sind Kegelschnitte, deren große Achse in die Gerade (1.) fällt und die den einen Brennpunkt im Kraftzentrum und die Länge der großen Achse $\left|\frac{1}{h}\right|$ gemeinsam haben*).

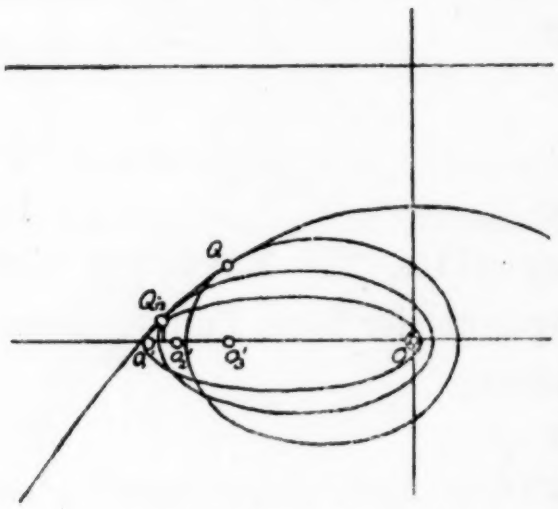

Fig. 2a.

Im Falle

$$\varepsilon = +1, \quad h = -l, \quad l > 0$$

sei O (Fig. 2a, M.-E. $\frac{2}{3}$ cm, $\varphi_0 = 0$, $l = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$) das Kraftzentrum, O_1', O_2' seien die zweiten Brennpunkte zweier beliebigen Bahnellipsen, Q_{12} ihr erster Schnittpunkt, von der Geraden (1.) aus im positiven Sinne gerechnet. Dann ist nach der Fundamentaleigenschaft der Ellipse

$$Q_{12}O + Q_{12}O_1' = \frac{1}{l},$$

$$Q_{12}O + Q_{12}O_2' = \frac{1}{l}:$$

$$Q_{12}O_1' = Q_{12}O_2',$$

Q_{12} liegt auf der Mittelsenkrechten von $O_1'O_2'$.

Sind die beiden Ellipsen, was bis jetzt nicht vorausgesetzt wurde, unendlich benachbart, so geht Q_{12} in den extremalen Brennpunkt der Geraden (1.) über. Daher erhält man diesen auf einer beliebigen Bahnellipse, indem man auf ihrer großen Achse im zweiten Brennpunkte das Lot errichtet.

Ist O' der zweite Brennpunkt einer beliebigen Ellipse unserer Schar, Q der auf ihr liegende extremale Brennpunkt der Geraden (1.), so folgt aus der Fundamentaleigenschaft der Ellipse

$$QO + QO' = \frac{1}{l}, \quad QO = \frac{1}{l} - QO',$$

*) *Kober*, Konjugierte kinetische Brennpunkte. Diss. Breslau 1910, S. 10, 11; *Jacobi*s Werke, suppl. S. 46.

daß der extremale Brennpunkt stets von einem festen Punkte O und einer festen Geraden

$$y = \frac{1}{l} \tag{3.}$$

denselben Abstand hat. Daraus ergibt sich, daß die Enveloppe unserer Schar eine Parabel ist, mit dem Kraftzentrum als Brennpunkt, mit der Geraden (3.) als Leitlinie.

Im Falle

$$\varepsilon = -1,\ h > 0$$

ist die Bahnkurve ein Hyperbelzweig, der dem Kraftzentrum seine konvexe Seite zuwendet. Man findet den extremalen Brennpunkt der Geraden (1.) auf einer beliebigen Bahnhyperbel, indem man in ihrem zweiten Brennpunkte das Lot errichtet. Als Enveloppe der Hyperbeln ergibt sich eine Parabel, die das Kraftzentrum zum Brenpunkt und die Gerade

$$y = -\frac{1}{h}$$

zur Leitlinie hat. (Fig. 2^b, M.-E. $\frac{2}{3}$ cm, $\varphi_0 = 0$, $h = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$).

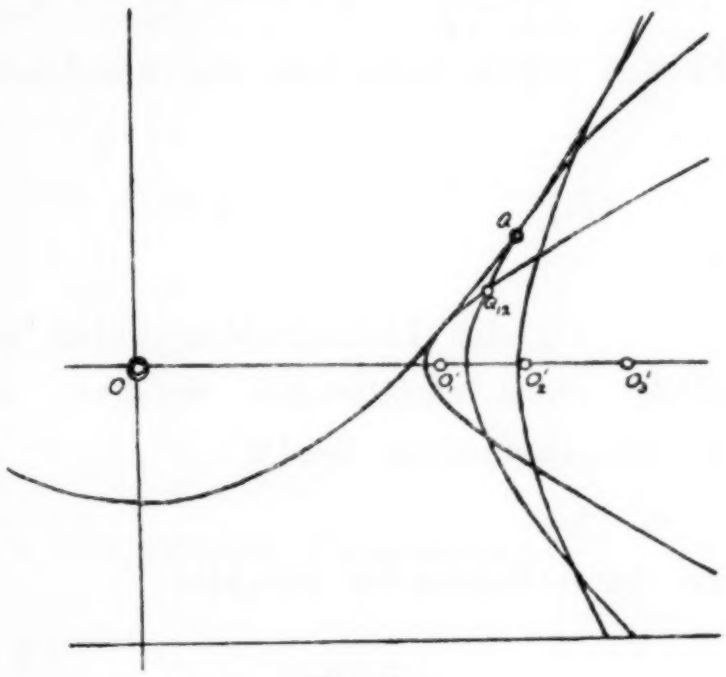

Fig. 2^b.

So also gestalten sich die Konstruktionen des konjugierten Punktes und der Enveloppe nach *Jacobi* und *Kober**), dessen geometrische Betrachtungsweise auch hier angewandt wurde, für den extremalen Brennpunkt um.

2. Ein Beispiel aus der geometrischen Optik.

§ 3. Die Brennlinie einer Geraden in einem Medium zu bestimmen, in dem sich die Lichtgeschwindigkeit nach allen Richtungen wie der vom Mittelpunkte aus genommene Radiusvektor einer Ellipse ändert**).

Bei dem allgemeinen Problem

$$\delta \int F(x, y, x', y')\, dt = 0$$

---

*) A. a. O.

**) Diese Aufgabe wurde in den Übungen über Variationsrechnung, die Herr Geheimrat *Kneser* im W.-S. 1913/14 abhielt, von Herrn Tillmann gelöst.

lautet die Reflexionsbedingung, wenn ein hinzugesetztes — die auf den einfallenden, ein + die auf den zurückgeworfenen Strahl bezüglichen Größen andeutet,

$$F^+_{x'}\delta x + F^+_{y'}\delta y = F^-_{x'}\delta x + F^-_{y'}\delta y^*).$$

Bei unserem Integrale

$$(1.) \qquad I = \int \sqrt{a^2 x'^2 + b^2 y'^2}\, dt$$

hat diese Beziehung, wenn die reflektierende Kurve die Gerade

$$(2.) \qquad y = mx + n$$

ist, die Form

$$\frac{a^2 + b^2 m\overset{+}{p}}{\sqrt{a^2 + b^2 \overset{+}{p}^2}} = \frac{a^2 + b^2 m\bar{p}}{\sqrt{a^2 + b^2 \bar{p}^2}}, \quad p = \frac{dy}{dx}:$$

hieraus ergibt sich, von der uninteressanten Lösung $\overset{+}{p} = \bar{p}$ abgesehen,

$$(3.) \qquad \overset{+}{p} = -\frac{\bar{p} - \dfrac{2a^2 m}{a^2 - b^2 m^2}}{1 + \dfrac{2b^2 m}{a^2 - b^2 m^2}\bar{p}}.$$

Da die Lichtstrahlen selbst gerade Linien sind, so ist die Gleichung eines einfallenden Strahles, wenn man sich die Lichtquelle im Koordinatenanfang denkt,

$$(4.) \qquad y = \bar{p}x,$$

die des reflektierten Strahles

$$y - (m\xi + n) = -\frac{\bar{p} - \dfrac{2a^2 m}{a^2 - b^2 m^2}}{1 + \dfrac{2b^2 m}{a^2 - b^2 m^2}\bar{p}}(x - \xi).$$

Sie erhält, wenn man aus ihr den Parameter ξ durch Bestimmung des Schnittpunktes der Geraden

$$\eta = \bar{p}\xi, \quad \eta = m\xi + n$$

fortschafft, die Form

$$(5.) \qquad y + \frac{n\bar{p}}{m - \bar{p}} = -\frac{\bar{p} - \dfrac{2a^2 m}{a^2 - b^2 m^2}}{1 + \dfrac{2b^2 m}{a^2 - b^2 m^2}\bar{p}}\left(x + \frac{n}{m - \bar{p}}\right).$$

---

*) *Kneser*, Lehrbuch der Variationsrechnung § 43.

Da diese Gleichung durch die Werte

$$(6.) \qquad x = -\frac{2b^2mn}{a^2 + b^2m^2},\ y = \frac{2a^2n}{a^2 + b^2m^2},$$

die vom Scharparameter $\bar{p}$ unabhängig sind, befriedigt wird, so zieht sich die gesuchte Brennlinie in den festen Punkt (6.) zusammen.

Dieser Punkt O' liegt erstens auf der Geraden

$$y = mx + 2n,$$

die von der Lichtquelle den doppelten Abstand hat wie die reflektierende Linie. Zeichnet man die einfallende Lichtwelle, die die reflektierende Gerade berührt, so liegt O' zweitens auf dem Durchmesser dieser Ellipse, dessen Richtung zu derjenigen der reflektierenden Linie konjugiert ist (Fig. 3).

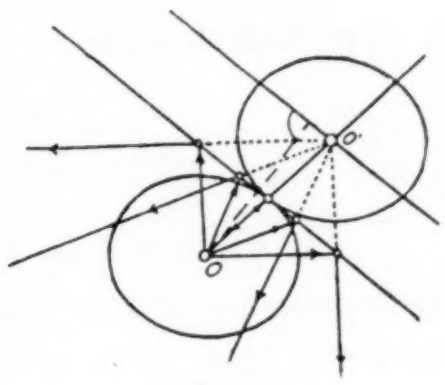

Fig. 3.

Denn die berührende Welle hat die Gleichung

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{a^2b^2n^2}{a^2 + b^2m^2},$$

sie berührt im Punkte

$$x_b = -\frac{b^2mn}{a^2 + b^2m^2}, \quad y_b = \frac{a^2n}{a^2 + b^2m^2},$$

daher ist die Gleichung des genannten konjugierten Durchmessers

$$y = -\frac{a^2}{b^2m}x,$$

und sie wird durch (6.) befriedigt.

Die zurückgeworfenen Strahlen verhalten sich ganz so, als ob sie von O' her kämen: die reflektierte Welle ist eine Ellipse mit dem Mittelpunkte O'.

In dieser Weise übertragen sich die Ergebnisse für einen ebenen Spiegel in einem Medium, in dem die Lichtwellen Kreise sind, auf den vorliegenden Fall.

3. Das Aufhören des Extremums bei geradlinigen symmetrischen Schwingungen eines materiellen Punktes.

Das *Hamilton*sche Prinzip

$$\delta \int (T + U)\, dt = 0$$

führt, wenn x die Zeit, y die Abszisse des materiellen Punktes auf der Geraden bedeutet und die rücktreibende Kraft in der Form

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2n\, y^{2n-1}$$

angenommen wird, zu dem Variationsproblem

$$\delta \int (p^2 - y^{2n})\, dx = 0 \text{*)}$$

mit den Extremalen

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{c^{2n} - y^{2n}}}.$$

Im Falle $n = 1$, der Sinuslinien als Extremalen liefert, entartet die Enveloppe der durch einen festen Punkt gehenden Extremalen in einen Punkt **); dies tritt nicht ein in den Fällen $n = 2$, $n = 3$, die wir jetzt behandeln wollen.

§ 4. $\delta \int (p^2 - y^4)\, dx = 0$ ***).

Die Gleichung der einparametrigen, durch den Nullpunkt gehenden Extremalenschar lautet

$$(1.) \qquad y = \frac{c}{\sqrt{2}} \frac{sn(cx\sqrt{2})}{dn(cx\sqrt{2})}, \quad k^2 = \frac{1}{2}:$$

es handelt sich um den harmonischen Fall der *Jacobi*schen elliptischen Funktionen. Für die *Jacobi*sche Determinante Δ ergibt sich

$$(2.) \qquad \Delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{ucnu + snudnu}{dnu^2}, \quad u = cx\sqrt{2}.$$

Die hieraus zur Bestimmung des zum Nullpunkte konjugierten Punktes folgende Gleichung

---

*) *Kneser*, Lehrbuch der Variationsrechnung. S. 97 f.

**) Ebenda S. 97 f.

***) *Kalähne*, Grundzüge der mathematisch-physikalischen Akustik, Leipzig 1910. S. 50-52.

$$\varphi(u) \equiv u + \frac{snu\,dnu}{cnu} = 0 \tag{3.}$$

hat ihre erste positive reelle Wurzel v im Intervalle

$$K < u < 2K,$$

wobei $4K$ nach *Jacobi* die Periode der elliptischen Funktionen bezeichnet: denn ihre linke Seite $\varphi(u)$ ist wegen

$$\varphi'(u) = \frac{1}{2}\frac{(1 + cnu^2)^2}{cnu^2}$$

eine beständig wachsende Funktion, und es ist

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi(K - 0) = +\infty,\ \varphi(K + 0) = -\infty,\ \varphi(2K) = 2K > 0$$

und dabei

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin\varphi^2}} = 1,8541$$

die erste reelle Unendlichkeitsstelle der Funktion $\varphi(u)$ für $u > 0$. Der zahlenmäßige Wert der Wurzel v ist etwa

$$v = 2,29, \tag{4.}$$

denn man findet aus den Tabellen von *Jahnke-Emde* *)

u	$\log u$	$\log\left(-\frac{snu\,dnu}{cnu}\right)$
2,2797	0,357878	0,365577
2,2915	0,360120	0,357514

Im konjugierten Punkte ist demnach

$$c = \frac{v}{x\sqrt{2}}; \tag{5.}$$

setzt man die zu dem für alle Extremalen konstanten Argument v gehörigen elliptischen Funktionen

$$snv = S,\ cnv = C, \tag{6.}$$

---

*) Leipzig 1909.

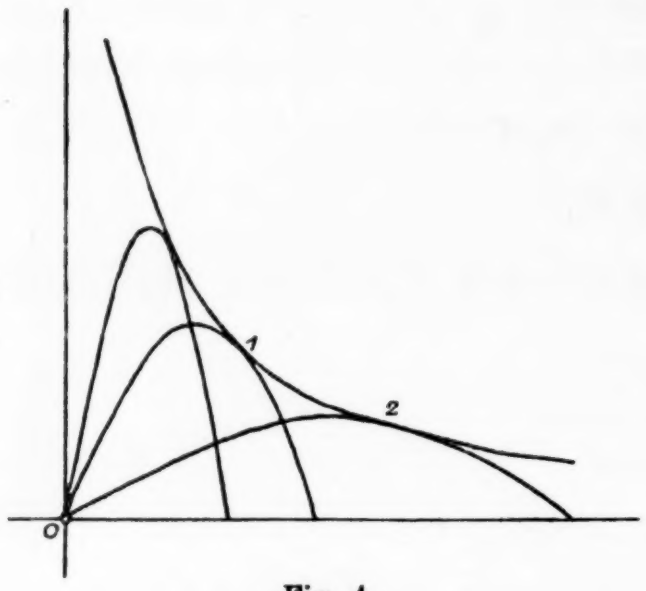

Fig. 4.

so daß identisch gilt

$$v = -\frac{SD}{C},$$

und substituiert (5.) in (1.), so ergibt sich als Enveloppe der Schar (1.) die gleichseitige Hyperbel (Fig. 4, M.-E. $\frac{4}{3}$ cm, $c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}$)

$$(7.) \qquad xy = -\frac{S^2}{2C}.$$

Das Problem $\delta \int (p^2 - y^6)\, dx = 0$ wird in derselben Weise erledigt; an Stelle der lemniskatischen Funktionen tritt die *Weierstraß*sche äquianharmonische $\wp$-Funktion.

4. Ein Beispiel für das Verhalten eines Paares konjugierter Punkte zueinander.

§ 5. $\delta \int (y^2 + h)\sqrt{1 + p^2}\, dx = 0.$

Die Differentialgleichung der Extremalen lautet

$$(1.) \qquad dx = \frac{c\, dy}{\sqrt{(y^2 + h + c)(y^2 + h - c)}},$$

wobei c positiv angenommen werden darf. Wir führen die Rechnung hier nur in dem Falle

$$c > h > 0$$

durch; die übrigen Fälle erledigen sich leichter als dieser.

Die Gleichung der zweifach unendlichen Extremalenschar lautet nach (1.)

$$(2.) \qquad \begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{h}{2}} \frac{1}{\sqrt{k^2 - k'^2}}\, u + b = \xi(u, k, b), \\ y &= \sqrt{2h}\, \frac{k'}{\sqrt{k^2 - k'^2}}\, \frac{1}{cn\, u} = \eta(u, k, b), \end{aligned}$$

wo

$$(2^a.) \qquad k = \sqrt{\frac{c + h}{2c}}, \quad k' = \sqrt{\frac{c - h}{2c}}, \quad k > k'$$

den *Jacobi*schen Modul der elliptischen Funktion und sein Komplement bedeuten. Dabei bewegt sich u etwa im Bereich

$$(2^b.) \qquad -K+0 \leqq u \leqq K-0,$$

innerhalb dessen y endlich bleibt, während es an den beiden Enden über alle Grenzen wächst.

Nachdem man mit Hülfe einer der Formeln für die Ableitungen der elliptischen Funktionen nach dem Modul*) die partiellen Ableitungen

$$\xi_u = \sqrt{\frac{h}{2}}\frac{1}{\sqrt{k^2-k'^2}}, \quad \xi_b = 1,$$

$$\eta_u = \sqrt{2h}\frac{k'}{\sqrt{k^2-k'^2}}, \quad \eta_b = 0,$$

$$\xi_k = -\sqrt{\frac{h}{2}}\frac{2k}{\sqrt{k^2-k'^{2^3}}}u,$$

$$\eta_k = \sqrt{2h}\left(\frac{-k}{\sqrt{k^2-k'^{2^3}}\,k'}\frac{1}{cnu} + \frac{k'}{\sqrt{k^2-k'^2}}\frac{-\frac{1}{kk'^2}E(u)snudnu + \frac{1}{k}usnudnu + \frac{k}{k'^2}snu^2cnu}{cnu^2}\right)$$

berechnet hat, bildet man aus

$$\mathfrak{D}_1(u) = \xi_u\eta_k - \xi_k\eta_u, \quad \mathfrak{D}_2(u) = \xi_u\eta_b - \xi_b\eta_u$$

die Gleichung für den zu einem beliebigen Punkte $P(v)$ konjugierten Punkt $Q(u)$

$$\frac{\mathfrak{D}_1(u)}{\mathfrak{D}_2(u)} = \frac{\mathfrak{D}_1(v)}{\mathfrak{D}_2(v)}\ **):$$

sie lautet im vorliegenden Falle

$$(3.) \quad \begin{aligned} &2k^2k'^2u - (k^2-k'^2)\left(E(u) - k'^2u - k^2\frac{snu\,cnu}{dnu}\right) - k^2\frac{cnu}{snu\,dnu} \\ &= 2k^2k'^2v - (k^2-k'^2)\left(E(v) - k'^2v - k^2\frac{snv\,cnv}{dnv}\right) - k^2\frac{cnv}{snv\,dnv}. \end{aligned}$$

Die linke Seite $\varphi(u)$ dieser Gleichung hat die Ableitung

$$\varphi'(u) = \frac{k^2[1-(k^2-k'^2)\,snu^2]^2}{snu^2\,dnu^2} > 0,$$

$\varphi(u)$ ist also eine beständig wachsende Funktion; sie nimmt im Bereiche $(2^b.)$ die Werte an

$$(4.) \quad \begin{aligned} &\varphi(-K) = -[2k^2k'^2K - (k^2-k'^2)(E-k'^2K)], \\ &\varphi(-0) = +\infty, \quad \varphi(+0) = -\infty, \\ &\varphi(+K) = +[2k^2k'^2K - (k^2-k'^2)(E-k'^2K)], \end{aligned}$$

---

*) D. S. 12, II.

**) Vgl. S. 106.

und die Stelle $u = 0$ ist ihre einzige Unendlichkeitsstelle in diesem Intervalle.

Hiernach gibt es kein Paar konjugierter Punkte auf den Extremalen, für die

$$(5^{a}.) \qquad \varphi(-K) > 0, \ \varphi(+K) = -\varphi(-K) < 0$$

ist, da die Funktion $\varphi(u)$ dann keinen Wert zweimal annimmt.

Hingegen gibt es später zu bestimmende Paare konjugierter Punkte auf den Extremalen, für die

$$(5^{b}.) \qquad \varphi(-K) < 0, \ \varphi(+K) > 0$$

ist.

Da K und E Funktionen von k^2 sind, muß man das Verhalten der Funktion

$$(6.) \qquad \psi(k^2) = \frac{2k^2k'^2K - (k^2 - k'^2)(E - k'^2 K)}{2k^2k'^2}$$

prüfen, um festzustellen, für welche Extremalen $(5^{a}.)$ und für welche $(5^{b}.)$ gilt. Wird zur Abkürzung

$$k^2 = c, \ k'^2 = c'$$

gesetzt, so erhält man wegen

$$\frac{E - c'K}{2cc'} = \frac{dK}{dc} \ *)$$

$$\frac{d\psi(c)}{dc} = -(k^2 - k'^2)\frac{d^2K}{dc^2} - \frac{dK}{dc}.$$

Nun gehorcht aber K als Funktion des Modulquadrates c der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$4cc'\frac{d^2K}{dc^2} - 4(c - c')\frac{dK}{dc} - K = 0 \ *),$$

mit deren Hülfe man den Ausdruck für $\frac{d\psi(c)}{dc}$ auf die Form bringt

$$(7.) \qquad \frac{d\psi(c)}{dc} = -\left[\left(1 + \frac{(c - c')^2}{cc'}\right)\frac{dK}{dc} + \frac{c - c'}{4cc'}K\right].$$

Da die Funktion

$$\chi(u) = E(u) - k'^2 u$$

an der Stelle $u = 0$ verschwindet und beständig wächst, weil ihre Ableitung

$$\chi'(u) = k^2 cn\, u^2$$

---

*) Z. B. *Durège*, Theorie der elliptischen Funktionen, Leipzig 1878. S. 290.

positiv ist*), hat $\chi(u)$ für positive Werte von u selbst positive Werte, insbesondere ist

$$\frac{E - k'^2 K}{2 k^2 k'^2} = \frac{dK}{dc} > 0.$$

Hiernach, und weil nach (2^b.)

$$c > c'$$

gilt, ist

$$\text{(8.)} \qquad \frac{d\psi(c)}{dc} < 0 \text{ für } \tfrac{1}{2} \leqq c < 1.$$

$\psi(c)$ ist also in diesem Intervall eine beständig abnehmende Funktion. Da sie darin stets endlich bleibt und für

$$k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

den positiven Wert

$$K(\tfrac{1}{2}) = 1{,}8541,$$

hingegen für

$$k = \sin 88^0$$

nach *Jahnke-Emde* den negativen Wert $-403{,}6$ hat, so besitzt sie eine Nullstelle k^* in diesem Intervall, und es ist

$$\text{(9.)} \qquad \psi(k^2) > 0 \text{ für } k < k^*, \ \psi(k^2) < 0 \text{ für } k > k^*.$$

Der zahlenmäßige Wert von k^* ist etwa

$$\text{(10.)} \qquad k^* = \sin 71^0,$$

wie folgendes Wertsystem zeigt:

k	$\psi(k^2)$
$\sin 71^0$	$+ 0{,}5077$
$\sin 71^0 30'$	$- 1{,}1651$

Zusammenfassend können wir sagen: Auf den Extremalen, für die

$$\text{(a.)} \qquad k > k^*$$

ist, gibt es kein Paar konjugierter Punkte. Ist

---

*) Der Punkt $u = K$, $\chi'(K) = \chi''(K) = 0$, $\chi'''(K) \neq 0$ liefert kein Extremum der Kurve $\eta = \chi(u)$.

$$k = k^*,$$

so sind nur die beiden unendlich fernen Punkte des Bogens (2.) zu einander konjugiert. Dagegen gibt es auf den Extremalen, für die

(b.) $$k < k^*$$

ist, im Endlichen gelegene Paare konjugierter Punkte, deren Verhalten wir jetzt mit Hülfe von (4.) untersuchen.

Im Bereiche (2^b.) werden alle zwischen $\varphi(-K)$ und $\varphi(+K)$ gelegenen Werte der Funktion $\varphi(u)$ zweimal angenommen, alle übrigen nur einmal. Die zu den ersteren gehörigen Parameterwerte v liegen einerseits zwischen $-K$ und dem zwischen $-K$ und 0 gelegenen, nach (4.) existierenden Werte w_2, für den

(11.) $$\varphi(w_2) = \varphi(+K)$$

ist, andererseits zwischen $+K$ und dem zwischen $+K$ und 0 gelegenen Werte w_1, für den

(12.) $$\varphi(w_1) = \varphi(-K)$$

ist. Wird die Ungeradheit der Funktion $\varphi(u)$ berücksichtigt und für w_1 w geschrieben, so folgt:

Zu jedem Punkt $P(v)$ der Intervalle

(13.) $$-K+0 \leqq v \leqq -w, \quad w \leqq v \leqq K+0$$

gibt es einen konjugierten, zu den Punkten des Intervalls

(14.) $$-w < v < +w$$

keinen.

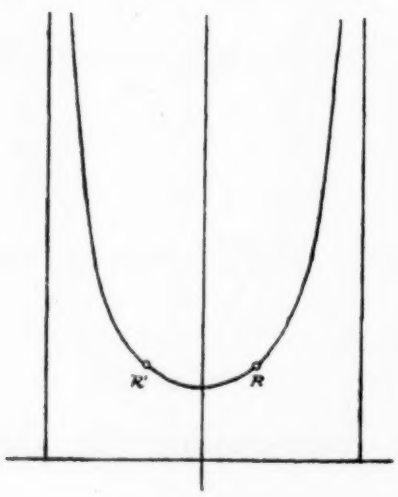

Fig. 5.

Bewegt sich der Punkt $P(v)$ von $\infty(-K)$ nach $R'(-w)$, so bewegt sich der konjugierte $Q(u)$ in demselben Sinne von dem zu R' in bezug auf die Gerade

$$x = b$$

symmetrischen Punkte $R(+w)$ nach $\infty(+K)$.

(Fig. 5, M.-E. 1 cm, $k = \sin 60^0 < k^*$, $b = 0$, $1{,}036 < w < 1{,}062$).

II. Kapitel.

Konjugierte Punkte beim isoperimetrischen Problem.

§ 6. Bestimmung der Kurve größten Trägheitsmoments in bezug auf eine Achse bei gegebener Länge*).

Die Lösung dieser Aufgabe liefert gleichzeitig die Gleichgewichtsfigur eines Fadens unter der Einwirkung einer Kraft, die der Entfernung von einer festen Geraden proportional ist und senkrecht zu dieser wirkt**).

Der Ansatz

$$\delta \int (y^2 + \lambda) \sqrt{1 + p^2}\, dx = 0$$

liefert als Differentialgleichung der Extremalen

$$dx = \frac{c\, dy}{\sqrt{(y^2 + \lambda)^2 - c^2}}$$

oder

$$dx = \frac{a^2\, dy}{\sqrt{(y^2 - b^2)^2 - a^4}}, \tag{1.}$$

wenn man, wie es die mechanische Bedeutung der Aufgabe erfordert**),

$$\lambda = -b^2,\ c = a^2,\ b^2 > a^2$$

setzt.

Wir behandeln den Fall, daß die gesuchte Kurve einen gegebenen Punkt mit dem Koordinatenanfangspunkte verbindet. Für die doppelt unendliche Schar von Extremalen durch den Nullpunkt findet man durch Integration von (1.) leicht die Darstellung

$$\begin{aligned} x &= \frac{ak'}{\sqrt{2}} u && = \xi\ (u, a, k), \\ y &= a\sqrt{2}\frac{k}{k'} sn\, u && = \eta\ (u, a, k), \\ s &= \frac{a\sqrt{2}}{k'} E(u) - \frac{ak'}{\sqrt{2}} u = \Omega\ (u, a, k) \end{aligned} \tag{2.}$$

in den *Jacobi*schen Bezeichnungen für die elliptischen Funktionen;

---

*) *Greenhill*, The applications of elliptic functions, London 1892, p. 67.

**) *Appell*, Traité de mécanique rationnelle. T. I. p. 196.

$$s = \int \sqrt{1 + p^2}\, dx$$

ist das isoperimetrische Integral, die Bogenlänge. Mit Hülfe der Formeln D. S. 12f., I, V für die partiellen Differentialquotienten der elliptischen Funktionen nach dem Modul erhält man für die Determinante

$$(3.) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \xi_u & \xi_a & \xi_k \\ \eta_u & \eta_a & \eta_k \\ \Omega_u & \Omega_a & \Omega_k \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{a^2\sqrt{2}}{k'^2} \begin{vmatrix} k' & ; k'u & ; -\frac{k}{k'}u \\ kcnudnu; & ksnu; & \frac{1}{k'^2}snu + k\left(-\frac{1}{kk'^2}E(u)\,cnudnu + \frac{1}{k}ucnudnu + \frac{k}{k'^2}snucnu^2\right) \\ dnu^2 & ; E(u); & \frac{k}{k'^2}E(u) + \left(-\frac{k}{k'^2}E(u)\,cnu^2 - kusnu^2 + \frac{k}{k'^2}snucnudnu\right) \end{vmatrix},$$

nachdem man den Summanden $-\xi$ in Ω unterdrückt hat. Die Unterdeterminanten von Δ bei Entwickelung nach den Elementen der ersten Zeile sind

$$\Delta_1 = \frac{k^2}{k'^2}E(u)^2 cnudnu - uE(u)cnudnu - E(u)snu - 2\frac{k^2}{k'^2}E(u)snucnu^2 - k^2 usnu^3 + \frac{k^2}{k'^2}snu^2 cnudnu,$$

$$\Delta_2 = -\frac{1}{k'^2}E(u)cnudnu + ucnudnu + \frac{1}{k'^2}snudnu^2,$$

$$\Delta_3 = kE(u)cnudnu - ksnudnu^2.$$

Mit Hülfe dieser Werte ergibt sich für die Determinante selbst

$$(4.) \qquad \Delta = \frac{a^2\sqrt{2}}{k'^3}[(u - E(u))^2 cnudnu + snu(u - E(u))(dnu^2 + k^2 cnu^2) - k^2 cnudnu(u^2 - snu^2)].$$

Nun ist

$$\Delta(0) = 0, \qquad \Delta(K) = \frac{a^3\sqrt{2}}{k'}(K - E),$$

$$\Delta(2K) = \frac{a^2\sqrt{2}}{k'^3}[E(K - E) + K(E - k'^2 K)], \qquad \Delta(3K) = -\frac{a^3\sqrt{2}}{k'}(K - E);$$

da die Differenzen $K - E$, $E - k'^2 K$ für alle Werte des Moduls positiv sind*),

*) Vgl. S. 120.

so hat man

$$\Delta(0)=0, \quad \Delta(K)>0, \quad \Delta(2K)>0, \quad \Delta(3K)<0,$$

folglich liegt sicher eine Nullstelle v der Determinante Δ im Intervalle

$$2K<v<3K, \quad \Delta(v)\equiv 0. \tag{5.}$$

Es gibt also auf jeder Extremalen einen zum Nullpunkt konjugierten Punkt $Q(v)$, und zwar auf der unteren Welle der Scharkurve (2.) vor ihrem tiefsten Punkte (Fig. 6, M. E. $\frac{1}{2}$cm, $a=2$, $k=k'=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $5{,}439<v<5{,}464$).

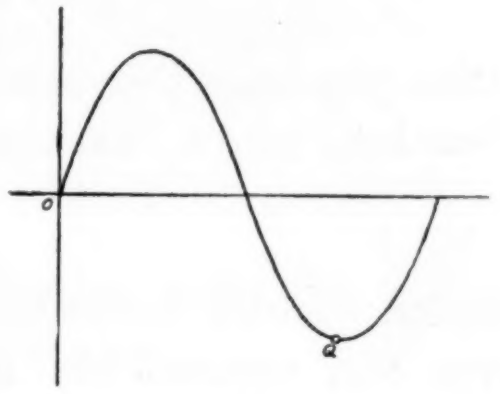

Fig. 6.

Um festzustellen, ob diese Wurzel v die erste auf $u=0$ folgende Wurzel der Determinante Δ ist, benutzen wir eine allgemeine Tatsache*), die Herr *Nikolaus* und Herr *Lindemann* unabhängig voneinander bemerkt haben. Nachdem wir Δ durch elementare Rechnung auf die Form gebracht haben

$$\Delta = a^2\sqrt{2}\,k^2k'\,cnu\,dnu\Big[\Big(\frac{1}{k'^4}\frac{snu\,dnu}{cnu}+\frac{k^4}{k'^4}\frac{snu\,cnu}{dnu}+\frac{1}{k'^2}u$$
$$-\frac{1+k^2}{k'^4}E(u)\Big)\Big(\frac{1}{k'^4}\frac{snu\,dnu}{cnu}+\frac{1}{k'^4}\frac{snu\,cnu}{dnu}+\frac{1}{k^2k'^2}u-\frac{1+k^2}{k^2k'^4}E(u)\Big)$$
$$-\Big(\frac{1}{k'^4}\frac{snu\,dnu}{cnu}+\frac{k^2}{k'^4}\frac{snucnu}{dnu}+\frac{1}{k'^2}u-\frac{2}{k'^4}E(u)\Big)^2\Big],$$

betrachten wir die durch

$$\mathfrak{D}(u)=a^2\sqrt{2}\,k^2k'\,cnu\,dnu\Big(\frac{1}{k'^4}\frac{snu\,dnu}{cnu}+\frac{k^4}{k'^4}\frac{snu\,cnu}{dnu}+\frac{1}{k'^2}u-\frac{1+k^2}{k'^4}E(u)\Big)$$

dividierte Determinante, also die Funktion

$$\varphi(u)=\frac{\Delta(u)}{\mathfrak{D}(u)}=\frac{1}{k'^4}\frac{snu\,dnu}{cnu}+\frac{1}{k'^4}\frac{snu\,cnu}{dnu}+\frac{1}{k^2k'^2}u-\frac{1+k^2}{k^2k'^4}E(u)$$
$$-\frac{\Big[\frac{1}{k'^4}\frac{snu\,dnu}{cnu}+\frac{k^2}{k'^4}\frac{snu\,cnu}{dnu}+\frac{1}{k'^2}u-\frac{2}{k'^4}E(u)\Big]^2}{\frac{1}{k'^4}\frac{snu\,dnu}{cnu}+\frac{k^4}{k'^4}\frac{snu\,cnu}{dnu}+\frac{1}{k'^2}u-\frac{1+k^2}{k'^4}E(u)}. \tag{6.}$$

Zähler und Nenner der als Bruch geschriebenen Funktion $\varphi(u)$ können außer für $u=0$ nie gleichzeitig verschwinden, denn sonst müßten für denselben Wert u_1 von u gleichzeitig die Gleichungen

*) vgl. D. S. 68, 78.

$$\frac{1}{k'^4}\frac{sn\,u_1\,dn\,u_1}{cn\,u_1}+\frac{k^2}{k'^4}\frac{sn\,u_1\,cn\,u_1}{dn\,u_1}+\frac{1}{k'^2}u_1-\frac{2}{k'^4}\;E(u_1)\;=0,$$
$$\frac{1}{k'^4}\frac{sn\,u_1\,dn\,u_1}{cn\,u_1}+\frac{k^4}{k'^4}\frac{sn\,u_1\,cn\,u_1}{dn\,u_1}+\frac{1}{k'^2}u_1-\frac{1+k^2}{k'^4}E(u_1)=0$$

bestehen, aus denen durch Subtraktion folgen würde

$$\chi(u_1)\equiv\frac{1}{k'^2}\;E(u_1)\;-\frac{k^2}{k'^2}\frac{sn\,u_1\,cn\,u_1}{dn\,u_1}=0.$$

Diese Gleichung aber kann für keinen von Null verschiedenen Wert von u_1 bestehen, da die Funktion $\chi(u)$ die wesentlich positive Ableitung

$$\chi'(u)=\frac{1}{dn\,u^2}$$

besitzt, mithin beständig wächst und daher, weil sie wegen des stets von Null verschiedenen Nenners dnu im Endlichen stets endlich bleibt, außer ihrer Nullstelle $u=0$ keine weitere Nullstelle haben kann. Ferner sind die Pole des Nenners von $\varphi(u)$ keine Nullstellen von $\varphi(u)$, denn man hat

$$\varphi\big((2n+1)K\big)=(2n+1)\frac{K-E}{k^2}>0,\;\;n=0,1,2,\ldots.$$

Folglich haben die Funktionen $\Delta(u)$ und $\varphi(u)$ genau dieselben Nullstellen.

Mit Benutzung der durch einfache Differentiation zu beweisenden Formeln

$$\frac{d}{du}\Big(\frac{1}{k'^4}\frac{snudnu}{cnu}+\frac{1}{k'^4}\frac{snucnu}{dnu}+\frac{1}{k^2k'^2}\,u-\frac{1+k^2}{k^2k'^4}E(u)\Big)=\frac{sn\,u^4}{cn\,u^2\,dn\,u^2},$$
$$\frac{d}{du}\Big(\frac{1}{k'^4}\frac{snudnu}{cnu}+\frac{k^2}{k'^4}\frac{snucnu}{dnu}+\frac{1}{k'^2}\;u-\frac{2}{k'^4}\;E(u)\Big)=\frac{sn\,u^2}{cn\,u^2\,dn\,u^2},$$
$$\frac{d}{du}\Big(\frac{1}{k'^4}\frac{snudnu}{cnu}+\frac{k^4}{k'^4}\frac{snucnu}{dnu}+\frac{1}{k'^2}\;u-\frac{1+k^2}{k'^4}E(u)\Big)=\frac{1}{cn\,u^2\,dn\,u^2}$$

finden wir für die Ableitung $\varphi'(u)$, wenn wir zur Abkürzung Zähler und Nenner des Subtrahenden in dem Ausdrucke (6.) für $\varphi(u)$ mit $f_1(u)^2$ und $f_2(u)$ bezeichnen,

$$\varphi'(u)=\frac{sn\,u^4}{cn\,u^2\,dn\,u^2}-\frac{2f_1(u)\dfrac{sn\,u^2}{cn\,u^2\,dn\,u^2}f_2(u)-f_1(u)^2\dfrac{1}{cn\,u^2\,dn\,u^2}}{f_2(u)^2}$$
$$=\left[\frac{f_2(u)\;\dfrac{sn\,u^2}{cn\,u\,dn\,u}-f_1(u)\;\dfrac{1}{cn\,u\,dn\,u}}{f_2(u)}\right]^2,$$

$$(7.)\quad \varphi'(u) = \left[\frac{snu^2}{cnudnu} - \frac{\left(\frac{1}{k'^4}\frac{snudnu}{cnu} + \frac{k^2}{k'^4}\frac{snucnu}{dnu} + \frac{1}{k'^2}u - \frac{2}{k'^4}E(u)\right)\frac{1}{cnudnu}}{\frac{1}{k'^4}\frac{snudnu}{cnu} + \frac{k^4}{k'^4}\frac{snucnu}{dnu} + \frac{1}{k'^2}u - \frac{1+k^2}{k'^4}E(u)} \right]^2.$$

$\varphi(u)$ ist demnach eine beständig wachsende Funktion. Ihre Unendlichkeitsstellen sind durch die Nullstellen von

$$\psi(u) = \frac{1}{k'^4}\frac{snudnu}{cnu} + \frac{k^4}{k'^4}\frac{snucnu}{dnu} + \frac{1}{k'^2}u - \frac{1+k^2}{k'^4}E(u)$$

gegeben. Auch $\psi(u)$ ist wegen

$$\psi'(u) = \frac{1}{cnu^2 dnu^2}$$

eine beständig wachsende Funktion; da ihre positiven reellen Pole die ungeraden Vielfachen von K sind, besitzt sie im Bereiche

$$(8.)\qquad 0 < u \leqq 3K$$

eine und nur eine Nullstelle. Die Funktion $\varphi(u)$ hat also in diesem Bereiche eine und nur eine Unendlichkeitsstelle und kann, da sie eine beständig wachsende Funktion ist, in ihm auch nur eine Nullstelle haben. Sie hat aber eine zwischen $u = 2K$ und $u = 3K$ gelegene Nullstelle v, da wir eine solche für Δ festgestellt haben: folglich gibt es in (8.) genau eine Nullstelle v der Funktion $\varphi(u)$ und also auch der Determinante Δ.

§ 10. $\delta \int (p^2 + \lambda y^6)\, dx = 0.$

Diese letzte Aufgabe werde hier behandelt, weil sie ein einfaches Beispiel für die Konstruktion der Enveloppe beim isoperimetrischen Problem bietet.

Die *Euler*sche Differentialgleichung

$$\lambda y^6 - p^2 = \text{const.} = \gamma$$

liefert für die Extremalen, wenn man λ negativ annimmt,

$$\lambda = -\frac{1}{a^2},$$

und die negative Konstante

$$\gamma = -\frac{c^6}{a^2}$$

setzt,

$$(1.) \qquad dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{c^6 - y^6}}.$$

Als Darstellung der räumlichen Doppelschar*) von Extremalen durch den Nullpunkt findet man durch Integration**) von (1.)

$$(2.) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{a}{c^2\sqrt[3]{2}}\,u &&= \xi(u, a, c), \\ y &= \frac{c}{\sqrt[3]{2}}\frac{1}{\sqrt{\wp u}} &&= \eta(u, a, c), \\ \int_0 y^6\,dx = z &= \frac{a c^4}{4\sqrt[3]{2}}\Big(u + \frac{1}{2}\frac{\wp' u}{\wp u^2}\Big) &&= \Omega(u, a, c) \end{aligned}$$

in der *Weierstraß*schen Bezeichnungsweise; dabei haben die Invarianten der elliptischen Funktion für alle Extremalen dieselben Werte

$$(2^a.) \qquad g_2 = 0,\ g_3 = 1,\ g_2^3 - 27 g_3^2 = -27.$$

Die Determinante (§ 6, (3.)) zur Bestimmung des zum Nullpunkte konjugierten Punktes wird

$$\Delta = \frac{a c^2}{2}\frac{1}{\sqrt{\wp u}}\begin{vmatrix} 1 & ; u & ; -\frac{2u}{c} \\ -\frac{1}{2}c\frac{\wp' u}{\wp u} & ; 0 & ; 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{\wp u^3} ; \frac{1}{4}\Big(u + \frac{1}{2}\frac{\wp' u}{\wp u^2}\Big) & ; \frac{1}{c}\Big(u + \frac{1}{2}\frac{\wp' u}{\wp u^2}\Big) \end{vmatrix}$$

und erhält, nach den Elementen der ersten Kolonne entwickelt, die Form

$$(3.) \qquad \Delta = \frac{a c^2}{2}\frac{1}{\sqrt{\wp u}}\Big[\Big(u + \frac{1}{2}\frac{\wp' u}{\wp u^2}\Big)\Big(\frac{3}{4}u\frac{\wp' u}{\wp u} - \frac{1}{4}\Big) + \frac{1}{4}\frac{u}{\wp u^3}\Big].$$

Bedeutet ω die reelle Periode der $\wp$-Funktion,

$$\omega = \int_\infty^{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - 1}} = 1{,}52995,$$

so ist

$$\Delta(\omega) = \tfrac{3}{8}\,a c^2 \sqrt[3]{2}\,\omega > 0,\ \Delta(2\omega) = 3 a c^2 \omega^2 > 0,\ \Delta(3\omega) = -\tfrac{9}{8}\sqrt[3]{2}\,a c^2 \omega < 0,$$

---

*) *Kneser*, Lehrbuch der Variationsrechnung, § 38.

**) vgl. dazu D. § 4.

es gibt mithin zwischen den Werten $u = 2\omega$, $u = 3\omega$ eine Nullstelle v der Determinante Δ, die im Gegensatz zu der Nullstelle v der Determinante § 6, (4.) für alle Extremalen denselben Wert hat, weil sie durch die wegen (2ª.) von allen Scharparametern freie Gleichung

$$(4.) \qquad \Phi(u) \equiv \Big(u + \frac{1}{2}\frac{\wp' u}{\wp u^2}\Big)\Big(\frac{3}{4}\,u\,\frac{\wp' u}{\wp u^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{\wp u^{\frac{1}{2}}}\Big) + \frac{1}{4}\,\frac{u}{\wp u^{\frac{7}{2}}} = 0$$

geliefert wird. Ihr zahlenmäßiger Wert ist etwa

$$(5.) \qquad v = 4{,}52\ldots,$$

wie folgende aus den *Jahnke-Emde*schen Tabellen entnommenen Werte zeigen:

u	$\Phi(u)$
4,522	— 0,5397
4,530	+ 0,0347

Ohne auf den mit Hülfe der Bemerkung von *Nikolaus* und *Lindemann* leicht zu führenden Nachweis dafür einzugehen, daß v die erste auf $u = 0$ folgende Wurzel der Determinante Δ ist, wollen wir jetzt das Aufhören des Extremums bei dieser Aufgabe zeigen*).

Es ist der einfach unendliche ausgezeichnete Extremalenbüschel zu suchen, längs dessen Enveloppe überall

$$(6.) \qquad u = v$$

ist. Der hierzu erforderliche Ansatz

$$(7.) \qquad (\xi_u \eta_a - \xi_a \eta_u)\,da + (\xi_u \eta_c - \xi_c \eta_u)\,dc\,\big|^{u=v} = 0$$

liefert die Differentialgleichung

$$\frac{v\wp' v}{2(\wp v - v\wp' v)}\,\frac{da}{a} + \frac{dc}{c} = 0,$$

und diese gibt, da v konstant ist, mit der Anfangsbedingung

$$c\,\big|^{a=1} = 1$$

---

*) Für das folgende vgl. *Kneser*, Lehrbuch der Variationsrechnung. § 40. S. S. 108, 109 dieser Arbeit.

integriert

$$c = a^{\frac{v\wp' v}{2(\wp v - v\wp' v)}}. \tag{8.}$$

Daher ist nach (2.) der ausgezeichnete räumliche Extremalenbüschel durch die Gleichungen dargestellt

$$\begin{aligned} x &= a^{-\frac{\wp v}{v\wp' v - \wp v}} \frac{1}{\sqrt[3]{2}} u = \xi(u, a), \\ y &= a^{\frac{v\wp' v}{2(v\wp' v - \wp v)}} \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{\sqrt{\wp u}} = \eta(u, a), \\ z &= \frac{1}{4 \cdot \sqrt[3]{2}} a^{1 + \frac{2v\wp' v}{v\wp' v - \wp v}} \left(u + \tfrac{1}{2} \frac{\wp' u}{\wp u^2}\right) = \Omega(u, a). \end{aligned} \tag{9.}$$

Zufolge der für die Enveloppe maßgebenden Gleichung (4.) erhält man für die räumliche Enveloppe der Schar (9.) die Darstellung

$$\begin{aligned} x &= \frac{v}{\sqrt[3]{2}} t &&= \bar{\xi}(t), \\ y &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{\sqrt{\wp v}} t^{-\frac{v\wp' v}{2\wp v}} &&= \bar{\eta}(t), \\ z &= \frac{1}{4 \cdot \sqrt[3]{2}} \left(v + \tfrac{1}{2} \frac{\wp' v}{\wp v^2}\right) t^{1 - \frac{3v\wp' v}{\wp v}} &&= \bar{\Omega}(t). \end{aligned} \tag{10.}$$

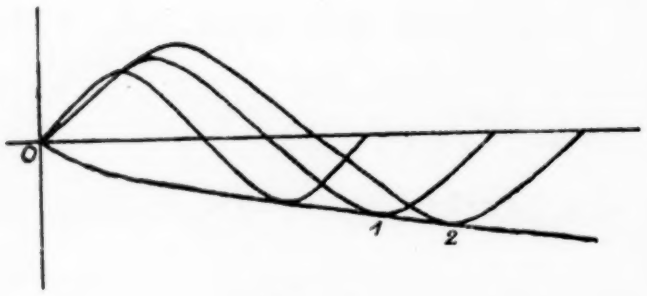

Fig. 7.

Fig. 7 (M. E. $\frac{2}{3}$ cm) zeigt drei Extremalen ($a = 1, 2, 3$) und die Enveloppe in der (x, y)-Ebene.

Das Aufhören des Extremums findet seinen Ausdruck in dem gleichzeitigen Bestehen der Gleichungen

$$\bar{I}_{01} + I_{12} = \bar{I}_{02}, \tag{11.}$$

$$\bar{K}_{01} + K_{12} = \bar{K}_{02} \tag{12.}$$

mit der auf S. 109 angewandten Bezeichnungsweise.

Zur Bestätigung ermittelt man im vorliegenden Falle als den gemeinsamen Wert der linken und rechten Seite in Gleichung (11.)

$$\mathfrak{j} = \frac{1}{4\cdot\sqrt[3]{2}}\left(3v - \frac{1}{2}\frac{\varphi' v}{\varphi v^2}\right)\left(\frac{x_2\sqrt[3]{2}}{v}\right)^{-\left(1+\frac{v\mathfrak{f}'v}{\mathfrak{f}v}\right)},$$

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{4\cdot\sqrt[3]{2}}\left(v + \frac{1}{2}\frac{\varphi' v}{\varphi v^2}\right)\left(\frac{x_2\sqrt[3]{2}}{v}\right)^{1-\frac{3v\mathfrak{f}'v}{\mathfrak{f}v}} \text{*)}.$$

*) Ich erlaube mir, Herrn Geheimrat *Kneser* für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und für wertvolle Ratschläge bei ihrer Anfertigung den ergebensten Dank auszusprechen.

Über die Erhaltung der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche bei independenter Veränderlichkeit aller ihrer Elemente*).

Von Herrn *Otto Szász* in Frankfurt a. M.

Diese Arbeit enthält einen ersten Schritt zur Erledigung des allgemeinen Problems: zu den Elementen eines gegebenen konvergenten Kettenbruches gewisse Umgebungen zu bestimmen, in denen diese Elemente variieren dürfen, ohne die Konvergenzeigenschaft des Kettenbruches zu stören. In dieser Richtung war bisher ausschließlich ein von Herrn *Perron* herrührender auf einen speziellen Fall bezüglicher Satz bekannt, der in den allgemeinen Sätzen dieser Arbeit enthalten ist, während die Methode eine von Herrn *von Pidoll* im Anschluß an Herrn *Pringsheim* für denselben speziellen Fall angewandte merklich verallgemeinert**).

Der schöne *Perron*sche Satz lautet***):

Seien a, b Funktionen von irgendwelchen Variablen in einem gewissen Bereiche (B), und sei überall $a \neq 0$; ferner gebe es eine positive Zahl $\vartheta < 1$, eine positive Zahl†) C und zwei Größen ϱ, σ, die den Gleichungen:

*) Die nachfolgende Untersuchung ist bis auf geringe Änderungen ein Teil meiner Frankfurter Habilitationsschrift vom Mai 1914. Ein Teil erschien in den Sitzungsberichten der Bayrischen Akademie, Jahrg. 1915, und ein dritter Teil erscheint in den Acta Mathematica. Jeder Teil ist unabhängig von den andern zu verstehen.

**) Die in dieser Arbeit auftretenden Größen sind beliebig komplex, sofern nicht gegenteiliges bemerkt ist.

***) *O. Perron*, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, § 56, Satz 40. Im folgenden unter „*Perron*, Lehrbuch“ zitiert. — Ich gebe den Satz in etwas veränderter Fassung wieder, um die Analogie mit einem später folgenden Satze (Satz 1) schärfer hervortreten zu lassen.

†) Auch fernerhin bedeute C stets eine geeignet gewählte Konstante.

$$\varrho + \sigma = b, \qquad \varrho\sigma = -a,$$

und den Ungleichungen:

$$\left|\frac{\sigma}{\varrho}\right| \leqq \vartheta, \qquad |\varrho| \leqq C$$

im ganzen Bereich genügen. Endlich sei θ eine den Ungleichungen

$$1 > \theta^2 > \frac{2\vartheta}{1+\vartheta^2}$$

genügende Zahl. Wenn dann die Elemente des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ Funktionen sind, die im ganzen Bereich den Ungleichungen:

$$\left|\frac{a_\nu}{a} - 1\right| \leqq (1-\theta)^3, \qquad \left|\frac{b_\nu - b}{\varrho}\right| \leqq (\theta - \vartheta)(1-\theta) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

genügen, so ist der Kettenbruch im Bereiche (B) gleichmäßig konvergent.

Dieser Satz läßt also die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ erkennen, wenn nur die Teilzähler in einer gewissen Umgebung von a und die Teilnenner in einer gewissen Umgebung von b liegen (wo a und b noch einer einfachen Bedingung unterworfen sind). Ich will dies kurz so bezeichnen, daß der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ in der Umgebung des periodischen Kettenbruches $\left[\frac{a}{b}\right]$ liegt. Zwar ist der Spezialfall $a = 0$ ausgenommen; für diesen Fall leistet aber das Wünschenswerte ein *Pringsheim*sches Konvergenzkriterium*), wonach der Kettenbruch $\left[\frac{c_\nu}{1}\right]_1^\infty$ konvergiert, wenn nur $|c_\nu| \leqq \frac{1}{4}$ für $\nu \geqq 2$ ist.

Der *Perron*sche Satz ist offenbar eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes über eingliedrig-limitärperiodische Kettenbrüche der Form $\left[\frac{a_\nu x}{1}\right]_1^\infty$, wo die $a_\nu (\nu \geqq 1)$ Konstanten mit dem Grenzwerte a sind**). Herr *von Pidoll****) hat den *Perron*schen Satz auf mehrgliedrig-periodische

*) *A. Pringsheim*, Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche, S. 322. [Sitzungsberichte der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften (München), Math.-phys. Klasse, Bd. 28, 1898. S. 295—324.]

**) *E. B. van Vleck*, On the convergence of algebraic continued fractions, whose coefficients have limiting values. [Transactions of the American Math. Soc. 5, 1904, p. 253—262.]

A. Pringsheim, Über Konvergenz und funktionentheoretischen Charakter gewisser limitärperiodischer Kettenbrüche. [Sitzungsber. d. math.-phys. Kl. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss., Jahrg. 1910, 6. Abh., 52 S.]

***) *M. von Pidoll*, Beiträge zur Lehre von der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche, § 4. [Diss. München, 1912.]

Kettenbrüche übertragen. Ich gelange im folgenden, von allgemeineren Betrachtungen ausgehend, zu ähnlichen Resultaten. Es wird sich eine Verallgemeinerung des *Perron*schen Satzes ergeben, welche — nebenbei bemerkt — auch für $a = 0$ gültig bleibt.

Herr *von Pidoll**) gab mit einer Verschiedenheit in den Konstanten auch eine neue Ableitung des *Perron*schen Satzes durch geeignete Modifikation des *Pringsheim*schen Beweises für den limitär-periodischen Fall. Ich bemerke, daß auch dieser Beweis den Vorteil bietet, auf den Fall $a = 0$ anwendbar zu sein, wenn man darin nur eine kleine Änderung vornimmt**). Gerade dieser Teil der *Pidoll*schen Arbeit ist mir bei den folgenden Ausführungen von Nutzen gewesen.

Indem ich mir die allgemeinere Aufgabe stellte, hinreichende Bedingungen anzugeben, unter denen die Elemente eines konvergenten Kettenbruches $\left[\frac{c_\nu}{d_\nu}\right]_1^\infty$ abgeändert werden dürfen, ohne die Konvergenz zu stören, gelangte ich zu einem allgemeinen Satze (Satz 1), den man als Erweiterung des *Perron*schen Satzes betrachten kann; durch Spezialisierung gewisser Größen lassen sich aus demselben beliebig viele einfachere, neue Konvergenzkriterien ableiten. Es werden sich insbesondere Konvergenzkriterien für den Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ ergeben, wenn die a_ν in gewissen Bereichen

---

*) A. a. O., § 3.

**) Herr *von Pidoll* führt nämlich die Bedingung

$$(1.) \qquad (1-\vartheta)^2 \leqq \left|\frac{z'}{z}\right|$$

ein, um nachzuweisen, daß dann

$$(2.) \qquad z'_\nu \neq 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Nun bleiben aber alle Schlüsse richtig, auch wenn nicht alle z'_ν von Null ververschieden sind. Man darf daher die Bedingung (1.) streichen und sowohl für a, wie für die a_ν den Wert Null zulassen. Auch in § 4, Bedingung (6.), kann man den Bestandteil: $(1-\vartheta)^2 < \left|\frac{z'}{z}\right|$ fortlassen, wodurch es möglich wird, dem ϑ einen beliebigen Wert im Innern des Intervalles (0, 1) zuzuschreiben. Nebenbei bemerkt, bestehen die Ungleichheiten (2.) sicherlich — auch wenn Bedingung (1.) nicht erfüllt ist — wenn nur $a_\nu \neq 0$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ ist, wie aus den Gleichungen

$$z_{\nu-1} z'_\nu = -a_\nu \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

unmittelbar folgt. Die Bedeutung der hier auftretenden Bezeichnungen wird später (§ 1) klar.

liegen. Bei Ableitung meines Satzes benutzte ich sowohl den *Pringsheim*schen, wie auch den *Perron*schen Gedankengang und war bestrebt, die darin auftretenden Konstanten möglichst günstig zu bestimmen, weil dies bei den spezielleren Sätzen von Vorteil ist. Ich hoffe das Verständnis zu erleichtern, wenn ich mich auch in den Bezeichnungen den vorerwähnten Arbeiten anschließe*).

§ 1.

Herleitung des Hauptsatzes.

Im folgenden werden Kettenbrüche von der Form

$$(3.) \qquad K = \left[\frac{c}{u_1 + u_1'}, \frac{-u_{\nu-1}u_\nu'}{u_\nu + u_\nu'}\right]_2^\infty$$

eine Rolle spielen; es sei daher einiges über diesen Kettenbruch vorausgeschickt. Ist

$$(4.) \qquad u_\nu \neq 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so erhält man durch eine äquivalente Transformation sofort:

$$K \equiv \left[\frac{\frac{c}{u_1}}{1 + \frac{u_1'}{u_1}}, \frac{-\frac{u_\nu'}{u_\nu}}{1 + \frac{u_\nu'}{u_\nu}}\right]_2^\infty;$$

wird noch

$$(5.) \qquad u_\nu' \neq 0 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

vorausgesetzt, so kann man eine bekannte *Euler*sche Formel**) anwenden, und erhält:

$$(6.) \qquad K \equiv \frac{c}{u_1}\left\{1 + \frac{u_2'}{u_2} + \frac{u_2'u_3'}{u_2u_3} + \frac{u_2'u_3'u_4'}{u_2u_3u_4} + \cdots\right\}, \quad u_1' = 0,$$

$$(7.) \qquad K \equiv \frac{c}{u_1'}\left\{1 - \frac{1}{1 + \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_1'u_2'}{u_1u_2} + \cdots}\right\}, \quad u_1' \neq 0^{***}).$$

Letztere Beziehung hat zu ähnlichem Zwecke, wie der hier verfolgte, zuerst Herr *v. Pidoll* (a. a. O., S. 41) angewandt. Ich gebe nun einen Beweis dieser Beziehungen *ohne die Bedingung* (5.) *einzuführen*, wobei auch weitere Eigenschaften des Kettenbruches (3.) zutage treten. Bezeichnet man den

*) Eine ausführlichere und weiter tragende Darstellung erscheint demnächst im Mathematikai és Természettudományi Értesítö, Budapest.

**) Vgl. *Perron*, Lehrbuch, S. 207, Formel (4.) und S. 210.

***) Übrigens geht (6.) aus (7.) auch durch Grenzübergang für $u_1' \to 0$ hervor.

Näherungsbruch ν-ter Ordnung dieses Kettenbruches mit $\frac{P_\nu}{Q_\nu}$, so ist offenbar:

$$Q_0 = 1,\ Q_1 = u_1 + u_1',$$

also:

$$(8.) \qquad Q_1 - u_1 Q_0 = u_1'.$$

Ferner ist offenbar:

$$Q_\nu = (u_\nu + u_\nu') Q_{\nu-1} - u_{\nu-1} u_\nu' Q_{\nu-2} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

oder:

$$Q_\nu - u_\nu Q_{\nu-1} = u_\nu' (Q_{\nu-1} - u_{\nu-1} Q_{\nu-2}) \qquad (\nu = 2, 3, \ldots);$$

hieraus und aus (8.) folgt durch vollständige Induktion:

$$(9.) \qquad Q_\nu - u_\nu Q_{\nu-1} = u_1' u_2' \ldots u_\nu' \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

oder:

$$\frac{Q_\nu}{u_1 u_2 \ldots u_\nu} - \frac{Q_{\nu-1}}{u_1 u_2 \ldots u_{\nu-1}} = \frac{u_1' u_2', \ldots u_\nu'}{u_1 u_2 \ldots u_\nu}.$$

Hieraus erhält man nun:

$$(10.) \qquad \frac{Q_\nu}{u_1 u_2 \ldots u_\nu} = 1 + \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_1' u_2'}{u_1 u_2} + \cdots + \frac{u_1' u_2' \ldots u_\nu'}{u_1 u_2 \ldots u_\nu}.$$

Ebenso gewinnt man einen Ausdruck für P_ν; es ist:

$$P_0 = 0,\ P_1 = c,$$

also:

$$P_1 - u_1 P_0 = c,$$

und aus

$$P_\nu - u_\nu P_{\nu-1} = u_\nu' (P_{\nu-1} - u_{\nu-1} P_{\nu-2})$$

folgt allgemein:

$$P_\nu - u_\nu P_{\nu-1} = c \cdot u_2' \ldots u_\nu',$$

und hieraus erhält man:

$$\frac{P_\nu}{u_1 u_2 \ldots u_\nu} - \frac{P_{\nu-1}}{u_1 u_2 \ldots u_{\nu-1}} = \frac{c u_2' \ldots u_\nu'}{u_1 u_2 \ldots u_\nu}.$$

Hieraus folgt schließlich:

$$(11.) \qquad \frac{P_\nu}{u_1 u_2 \ldots u_\nu} = \frac{c}{u_1} + \frac{c}{u_1} \cdot \frac{u_2'}{u_2} + \cdots + \frac{c}{u_1} \cdot \frac{u_2' \ldots u_\nu'}{u_2 \ldots u_\nu}.$$

Aus (10.) und (11.) folgt nun

für $u_1' = 0$:

$$\frac{P_\nu}{Q_\nu} = \frac{c}{u_1} \left(1 + \frac{u_2'}{u_2} + \cdots + \frac{u_2' \ldots u_\nu'}{u_2 \ldots u_\nu}\right),$$

und für $u_1' \neq 0$:

$$\frac{P_\nu}{Q_\nu} = \frac{c}{u_1'} \cdot \frac{\frac{u_1}{u_1} + \frac{u_1' u_2'}{u_1 u_2} + \cdots + \frac{u_1' u_2' \ldots u_\nu'}{u_1 u_2 \ldots u_\nu}}{1 + \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_1' u_2'}{u_1 u_2} + \cdots + \frac{u_1' u_2' \ldots u_\nu'}{u_1 u_2 \ldots u_\nu}}$$

$$= \frac{c}{u_1'}\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_1' u_2'}{u_1 u_2} + \cdots + \frac{u_1' u_2' \ldots u_\nu'}{u_1 u_2 \ldots u_\nu}}\right);$$

womit die Beziehungen (6.) und (7.) bewiesen sind.

Der Hauptsatz unserer Untersuchung ist nun:

Satz 1. *Seien* $d_\nu, c_\nu (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *Funktionen von irgendwelchen Variablen in einem gewissen Bereiche B. Ferner gebe es 3 Folgen von veränderlichen Größen* u_ν, u_ν' *und* ϑ_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots;$ ϑ_ν *reell* $\geqq 0)$, *die im ganzen Bereiche den Bedingungen genügen:*

$$\left.\begin{array}{ll} B_1) & u_\nu = d_\nu - u_\nu' \neq 0 \\ B_2) & u_\nu u_{\nu+1}' = -c_{\nu+1} \\ B_3) & \left|\frac{u_\nu'}{u_\nu}\right| \leqq \vartheta_\nu \end{array}\right\} (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

$B_4)$ $\sum_2^\infty{}^\nu \vartheta_2 \vartheta_3 \ldots \vartheta_\nu$ *konvergiert gleichmäßig in B.*

Endlich seien $s_\nu, t_\nu (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ 2 *Folgen reeller Größen, welche die Bedingungen erfüllen:*

$$\left.\begin{array}{ll} B_5) & 0 \leqq t_\nu \leqq s_\nu < 1 \\ B_6) & (s_{\nu+1} - t_{\nu+1})(1 - s_\nu) \geqq \vartheta_{\nu+1} s_\nu \end{array}\right\} (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

$B_7)$ $\sum_2^\infty{}^\nu \prod_2^\nu{}^\lambda \frac{\vartheta_\lambda + s_\lambda - t_\lambda}{1 - s_\lambda}$ *konvergiert gleichmäßig in B.*

Wenn nun die Elemente des Kettenbruches:

$$(12.) \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

Funktionen sind, die im ganzen Bereiche B den Ungleichungen)*

---

*) In den linksstehenden Ausdrücken sind diese Ungleichungen den Ungleichungen (5.) und (6.) des Herrn *v. Pidoll* (a. a. O.) und den entsprechenden des Herrn *Perron* analog; man beachte namentlich, daß

$$\left|\frac{a_\nu}{a} - 1\right| = \left|\frac{a_\nu - a}{a}\right| = \left|\frac{a_\nu - a}{\varrho\sigma}\right| = \left|\frac{a_\nu - a}{\varrho^2}\right| \cdot \left|\frac{\varrho}{\sigma}\right|$$

ist, und in diesem speziellen Falle wird:

$$u_\nu = \varrho, \; u_\nu' = \sigma, \; c_\nu = a \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es ist zu bemerken, daß wegen $B_5)$ und $B_6)$ die rechte Seite in $B_8)$ und $B_9)$ nicht negativ ist.

$$\left.\begin{aligned} B_8)\ &\left|\frac{a_{\nu+1}-c_{\nu+1}}{u_\nu u_{\nu+1}}\right| \leqq (s_{\nu+1}-t_{\nu+1})(1-s_\nu)-\vartheta_{\nu+1}s_\nu \\ B_9)\ &\left|\frac{b_\nu-d_\nu}{u_\nu}\right| \leqq t_\nu \end{aligned}\right\} (\nu=1,2,3,\ldots)$$

genügen, so konvergiert der Kettenbruch mindestens im weiteren Sinne) im Bereiche B. Ist* $u_1'=0$ *und* $\left|\frac{a_1}{b_1}\right|$ *unterhalb einer endlichen Schranke in B, so ist der Kettenbruch gleichmäßig konvergent in B.*

Um den Satz zu beweisen, definieren wir gewisse Funktionen z_ν, z_ν' $(\nu=1,2,3,\ldots)$ durch die Rekursionsformeln:

$$\left.\begin{aligned} (13.)\quad & z_1' = u_1' \\ (14.)\quad & z_\nu = b_\nu - z_\nu' \\ (15.)\quad & z_\nu z_{\nu+1}' = -a_{\nu+1} \end{aligned}\right\} (\nu=1,2,3,\ldots);$$

hierdurch sind z_ν und z_ν' eindeutig bestimmt, sofern kein z_ν verschwindet. Ich beweise nun die Ungleichungen:

$$\left.\begin{aligned} (16.)\quad & \left|1-\frac{z_\nu}{u_\nu}\right| \leqq s_\nu \\ (17.)\quad & z_\nu \neq 0 \end{aligned}\right\} (\nu=1,2,3,\ldots).$$

Zunächst folgt für $\nu=1$ aus (13.), (14.) und B_1):

$$\left|1-\frac{z_1}{u_1}\right| = \left|1-\frac{b_1-u_1'}{u_1}\right| = \left|\frac{d_1-b_1}{u_1}\right|,$$

und mit Rücksicht auf B_9) und B_5) ist nun ersichtlich, daß die Ungleichung (16.) für $\nu=1$ richtig ist; hieraus folgt unmittelbar (da $s_1<1$ ist), daß auch (17.) für $\nu=1$ gilt. Wir nehmen nun an, (16.) und (17.) gelte bereits für ν $(\nu \geqq 1)$, und beweisen, daß es dann auch für $\nu+1$ gilt. Aus den Gleichungen (15.) und (14.) erhält man zunächst:

$$a_{\nu+1} = -z_\nu z_{\nu+1}' = -z_\nu(b_{\nu+1}-z_{\nu+1}), \quad \text{oder:}$$

$$z_\nu z_{\nu+1} = a_{\nu+1} + z_\nu b_{\nu+1},$$

und wenn man auf beiden Seiten $z_\nu u_{\nu+1}$ subtrahiert:

---

*) D. h., er ist entweder konvergent (im engeren Sinne), oder unwesentlich divergent; demgegenüber wird Konvergenz im engeren Sinne schlechthin mit Konvergenz bezeichnet; vgl. *Perron*, Lehrbuch, S. 232. — Für die Konvergenz im weiteren Sinne genügt es schon, die Bedingungen des Satzes 1 in entsprechender Weise für den Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_n^\infty$ zu formulieren, wo n eine natürliche Zahl ist. Wenn nämlich $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_n^\infty$ im weiteren Sinne konvergiert, so gilt dasselbe für den Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$; vgl. *Perron*, Lehrbuch, Seite 232, Satz 2.

$$z_\nu(z_{\nu+1}-u_{\nu+1}) = a_{\nu+1} + z_\nu(b_{\nu+1}-u_{\nu+1}).$$

Ersetzt man auf der rechten Seite dieser Gleichung $u_{\nu+1}$ durch $d_{\nu+1}-u'_{\nu+1}$ und zieht $0 = c_{\nu+1} + u_\nu u'_{\nu+1}$ ab, so ergibt sich:

$$z_\nu(z_{\nu+1}-u_{\nu+1}) = a_{\nu+1} - c_{\nu+1} + z_\nu(b_{\nu+1}-d_{\nu+1}) + u'_{\nu+1}(z_\nu - u_\nu).$$

Dividiert man dies durch $z_\nu u_{\nu+1} (\neq 0)$, so folgt:

$$\frac{z_{\nu+1}}{u_{\nu+1}} - 1 = \frac{a_{\nu+1}-c_{\nu+1}}{z_\nu u_{\nu+1}} + \frac{b_{\nu+1}-d_{\nu+1}}{u_{\nu+1}} + \frac{u'_{\nu+1}}{u_{\nu+1}}\left(1-\frac{u_\nu}{z_\nu}\right), \quad \text{und hieraus:}$$

$$(18.)\quad \left|1-\frac{z_{\nu+1}}{u_{\nu+1}}\right| \leqq \left|\frac{u_\nu}{z_\nu}\right| \cdot \left|\frac{a_{\nu+1}-c_{\nu+1}}{u_\nu u_{\nu+1}}\right| + \left|\frac{b_{\nu+1}-d_{\nu+1}}{u_{\nu+1}}\right| + \left|\frac{u'_{\nu+1}}{u_{\nu+1}}\right| \cdot \left|\frac{u_\nu}{z_\nu}\right| \cdot \left|1-\frac{z_\nu}{u_\nu}\right|.$$

Aus (16.) folgt aber:

$$(19.)\quad \left|\frac{z_\nu}{u_\nu}\right| \geqq 1 - s_\nu, \quad \text{also:}$$

$$(20.)\quad \left|\frac{u_\nu}{z_\nu}\right| \leqq \frac{1}{1-s_\nu}.$$

Mit Benutzung von (20), B_8), B_9), B_3) und (16.) folgt schließlich aus (18.):

$$\left|1-\frac{z_{\nu+1}}{u_{\nu+1}}\right| \leqq \left(s_{\nu+1} - t_{\nu+1} - \frac{\vartheta_{\nu+1}s_\nu}{1-s_\nu}\right) + t_{\nu+1} + \frac{\vartheta_{\nu+1}s_\nu}{1-s_\nu}, \quad \text{d. h.:}$$

$$\left|1-\frac{z_{\nu+1}}{u_{\nu+1}}\right| \leqq s_{\nu+1}.$$

Hieraus folgt auch (wegen $s_{\nu+1} < 1$), daß $z_{\nu+1} \neq 0$ ist; somit ist (16.) und (17.) allgemein gültig.

Nun ist offenbar:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\frac{a_1}{z_1+z'_1}, \frac{-z_{\nu-1}z'_\nu}{z_\nu+z'_\nu}\right]_2^\infty,$$

und durch Anwendung der Beziehungen (6.) und (7.) erhält man hieraus (da $z'_1 = u'_1$ ist):

$$\text{für } u'_1 = 0: \quad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv \frac{a_1}{z_1}\left\{1 + \frac{z'_2}{z_2} + \frac{z'_2z'_3}{z_2z_3} + \frac{z'_2z'_3z'_4}{z_2z_3z_4} + \cdots\right\},$$

$$\text{und für } u'_1 \neq 0: \quad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv \frac{a_1}{u'_1}\left\{1 - \frac{1}{1 + \frac{z'_1}{z_1} + \frac{z'_1z'_2}{z_1z_2} + \cdots}\right\}.$$

Zum Beweise unseres Satzes genügt es nunmehr, zu zeigen, daß die Reihen:

$$S_1 = 1 + \sum_1^\infty{}^\nu \frac{z'_1z'_2\ldots z'_\nu}{z_1z_2\ldots z_\nu}, \quad S_2 = 1 + \sum_2^\infty{}^\nu \frac{z'_2\ldots z'_\nu}{z_2\ldots z_\nu}$$

gleichmäßig konvergieren. Nun ist aber [vgl. Gl. (15.)]:

$$(21.)\quad \left|\frac{z'_\nu}{z_\nu}\right| = \left|\frac{a_\nu}{u_{\nu-1}u_\nu}\right| \cdot \left|\frac{u_{\nu-1}u_\nu}{z_{\nu-1}z_\nu}\right| \qquad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

und aus B_8) folgt:

$$\left|\frac{a_\nu}{u_{\nu-1}u_\nu}\right| \leqq \left|\frac{c_\nu}{u_{\nu-1}u_\nu}\right| + (s_\nu - t_\nu)(1 - s_{\nu-1}) - \vartheta_\nu s_{\nu-1} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots);$$

ferner ist [vgl. B_2) und B_3)]:

$$\left|\frac{c_\nu}{u_{\nu-1}u_\nu}\right| = \left|\frac{u_{\nu-1}u'_\nu}{u_{\nu-1}u_\nu}\right| = \left|\frac{u'_\nu}{u_\nu}\right| \leqq \vartheta_\nu, \quad \text{daher auch:}$$

$$(22.) \qquad \left|\frac{a_\nu}{u_{\nu-1}u_\nu}\right| \leqq (s_\nu - t_\nu + \vartheta_\nu)(1 - s_{\nu-1}).$$

Mit Hilfe der Ungleichungen (22.) und (20.) erhält man schließlich aus (21.):

$$\left|\frac{z'_\nu}{z_\nu}\right| \leqq \frac{s_\nu - t_\nu + \vartheta_\nu}{1 - s_\nu} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots);$$

diese Ungleichung gilt auch für $\nu = 1$, denn es ist:

$$\left|\frac{z'_1}{z_1}\right| = \left|\frac{u'_1}{z_1}\right| = \left|\frac{u'_1}{u_1}\right| \cdot \left|\frac{u_1}{z_1}\right| \leqq \frac{\vartheta_1}{1 - s_1}.$$

Die Bedingung B_7) zeigt nun unmittelbar, daß die Reihen S_1 und S_2 gleichmäßig (und unbedingt) konvergieren. Somit ist Satz 1 bewiesen.

Aus B_1) und B_2) folgt:

$$(23.) \qquad \left[\frac{c_1}{d_1 - u'_1}, \frac{c_\nu}{d_\nu}\right]_2^\infty = \left[\frac{c_1}{u_1}, \frac{-u_{\nu-1}u'_\nu}{u_\nu + u'_\nu}\right]_2^\infty;$$

bezeichnet man den Näherungsbruch ν-ter Ordnung dieses Kettenbruches mit $\frac{P_\nu}{Q_\nu}$, so folgt aus (9.) (da in K $u'_1 = 0$ zu setzen ist, um (3.) mit (23.) in Einklang zu bringen):

$$(24.) \qquad u_\nu = \frac{Q_\nu}{Q_{\nu-1}} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)^*);$$

die Bedingungen B_1) und B_2) besagen also nichts anderes, als daß die Näherungsbrüche des Kettenbruches (23.) sämtlich einen Sinn haben. Die Bedingung B_4) ist offenbar in der Bedingung B_7) enthalten. Für $u'_1 = 0$ postulieren die Bedingungen $B_1) - B_4)$ die Konvergenz des Kettenbruches

$$(23'.) \qquad \left[\frac{c_\nu}{d_\nu}\right]_1^\infty = \frac{c_1|}{|d_1} + \frac{c_2|}{|d_2} + \frac{c_3|}{|d_3} + \cdots$$

und sogar die absolute Konvergenz der zu ihm äquivalenten Reihe. Im allgemeinen Falle (d. h. für beliebiges u'_1) gilt dasselbe für den Kettenbruch (23.). Das Resultat ist, daß der Kettenbruch $\left[\frac{a_1}{b_1 - u'_1}, \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$ konvergiert und sogar die zu ihm äquivalente Reihe absolut konvergiert.

---

*) Eine andere Herleitung von (24.) siehe S. 152, Formel (39.).

Schließlich weise ich darauf hin, daß die Bedingungen $B_5) - B_7)$ stets erfüllt werden können, sogar so, daß in $B_6)$ durchweg Ungleichheit gilt, wenn nur alle $\vartheta_\nu (\nu \geqq 2)$ von Null verschieden sind. Ich setze der Einfachheit halber

$$t_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

dann habe ich die s_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ so zu bestimmen, daß die Bedingungen erfüllt sind:

$$\left.\begin{array}{ll} b_1) & 0 \leqq s_\nu < 1 \\ b_2) & s_{\nu+1}(1 - s_\nu) > \vartheta_{\nu+1} s_\nu \end{array}\right\} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$b_3) \qquad \sum_2^\infty{}_\nu \prod_2^\nu{}_\lambda \frac{\vartheta_\lambda + s_\lambda}{1 - s_\lambda} \text{ konvergiert gleichmäßig in } B.$$

Zu diesem Ende sei $\vartheta_2', \vartheta_3', \ldots$ eine Folge von positiven Größen, die den Bedingungen genügen:

$$\vartheta_\nu' > \vartheta_\nu \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

$$\sum_2^\infty{}_\nu \vartheta_2' \vartheta_3' \ldots \vartheta_\nu' \text{ konvergiert gleichmäßig in } B.$$

Ferner sei s eine der Ungleichheit

$$\sum_2^\infty{}_\nu \vartheta_2' \vartheta_3' \ldots \vartheta_\nu' < \frac{1-s}{s} + \vartheta_2' - 1 \qquad (0 < s < 1)$$

genügende Größe. Nun setze ich

$$s_1 = s, \; s_{\nu+1}(1 - s_\nu) = \vartheta_{\nu+1}' s_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und behaupte, daß die geforderten Bedingungen erfüllt sind. Jetzt ist nämlich allgemein

$$\frac{1}{s_{\nu+1}} = \frac{\frac{1-s}{s} - \vartheta_2'\vartheta_3' - \cdots - \vartheta_2' \ldots \vartheta_\nu'}{\vartheta_2' \vartheta_3' \ldots \vartheta_{\nu+1}'} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

es ist also klar, daß die Beziehungen $b_1)$ und $b_2)$ statthaben; aber auch die Bedingung $b_3)$ ist erfüllt, denn es ist:

$$s_{\nu+1} < \vartheta_2' \vartheta_3' \ldots \vartheta_{\nu+1}' \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

also

$$\vartheta_\lambda + s_\lambda < \vartheta_\lambda' + \vartheta_2' \ldots \vartheta_\lambda' = \vartheta_\lambda'(1 + \vartheta_2' \ldots \vartheta_{\lambda-1}') \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots),$$

ferner folgt aus $b_1)$

$$\frac{1}{1 - s_\lambda} < 1 + 2 s_\lambda < 1 + 2\vartheta_2' \ldots \vartheta_\lambda' \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots)$$

also schließlich:

$$\prod_2^\nu{}^\lambda \frac{\vartheta_\lambda + s_\lambda}{1-s_\lambda} < \prod_2^\nu{}^\lambda \vartheta'_\lambda (1 + \vartheta'_2 \dots \vartheta'_{\lambda-1})(1 + 2\vartheta'_2 \dots \vartheta'_\lambda)$$

$$< e^{1+2\sum_2^\nu{}^\lambda \cdot \vartheta'_2 \dots \vartheta'_\lambda + \sum_2^{\nu-1}{}^\lambda \vartheta'_2 \dots \vartheta'_\lambda} \prod_2^\nu{}^\lambda \vartheta'_\lambda,$$

woraus unsere Behauptung folgt. In Satz 1 ist also folgendes Resultat enthalten:

Wenn die Elemente des konvergenten Kettenbruches $\left[\frac{c_\nu}{1}\right]_1^\infty$ *von Null verschieden sind und die mit ihm äquivalente Reihe absolut konvergiert* (also eo ipso die Näherungsbrüche sämtlich einen Sinn haben), *so kann man jedes* c_ν *mit einem Bereich umgeben, derart, daß bei beliebiger Änderung der* c_ν *in ihren Bereichen, die Konvergenz des Kettenbruches erhalten bleibt und sogar die mit ihm äquivalente Reihe absolut konvergent bleibt.*

Zwecks späterer Anwendung (vgl. S. 145) leite ich schon hier die Ungleichungen ab:

$$(25.) \qquad \left.\begin{aligned} \left|\frac{z'_\nu - u'_\nu}{z_\nu}\right| &\leqq \frac{s_\nu - t_\nu}{1-s_\nu} \\ \left|\frac{u'_\nu}{z_\nu}\right| &\leqq \frac{\vartheta_\nu}{1-s_\nu} \\ \left|\frac{u'_\nu}{z_\nu} - \frac{u'_\nu}{u_\nu}\right| &\leqq \frac{\vartheta_\nu s_\nu}{1-s_\nu} \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Es ist nämlich $\frac{z'_1 - u'_1}{z_1} = 0$, ferner:

$$\frac{z'_\nu - u'_\nu}{z_\nu} = \frac{u_{\nu-1}}{z_{\nu-1}} \cdot \frac{u_\nu}{z_\nu}\left(\frac{z_{\nu-1}}{u_{\nu-1}} \cdot \frac{z'_\nu}{u_\nu} - \frac{z_{\nu-1}}{u_{\nu-1}} \cdot \frac{u_\nu}{u_\nu}\right),$$

und mit Rücksicht auf (15.) und B_2) erhält man hieraus:

$$\frac{z'_\nu - u'_\nu}{z_\nu} = \frac{u_{\nu-1}}{z_{\nu-1}} \cdot \frac{u_\nu}{z_\nu}\left[\frac{c_\nu - a_\nu}{u_{\nu-1}u_\nu} + \frac{u'_\nu}{u_\nu}\left(1 - \frac{z_{\nu-1}}{u_{\nu-1}}\right)\right].$$

Mit Hilfe von (20.), B_8), B_3) und (16.) folgt nun:

$$\left|\frac{z'_\nu - u'_\nu}{z_\nu}\right| \leqq \frac{1}{(1-s_{\nu-1})(1-s_\nu)}\left[(s_\nu - t_\nu)(1 - s_{\nu-1}) - \vartheta_\nu s_{\nu-1} + \vartheta_\nu s_{\nu-1}\right],$$

das heißt:

$$\left|\frac{z'_\nu - u'_\nu}{z_\nu}\right| \leqq \frac{s_\nu - t_\nu}{1-s_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Ferner ist (vgl. B_3) und (20.)):

$$\left|\frac{u'_\nu}{z_\nu}\right| = \left|\frac{u'_\nu}{u_\nu}\right| \cdot \left|\frac{u_\nu}{z_\nu}\right| \leqq \frac{\vartheta_\nu}{1-s_\nu};$$

und schließlich:

$$\frac{u'_\nu}{z_\nu} - \frac{u'_\nu}{u_\nu} = \frac{u'_\nu}{u_\nu}\left(\frac{u_\nu}{z_\nu} - 1\right) = \frac{u'_\nu}{u_\nu} \cdot \frac{u_\nu}{z_\nu}\left(1 - \frac{z_\nu}{u_\nu}\right),$$

also:

$$\left|\frac{u'_\nu}{z_\nu} - \frac{u'_\nu}{u_\nu}\right| \leqq \frac{\vartheta_\nu s_\nu}{1-s_\nu}.$$

Die Ungleichungen (25.) sind nun alle drei bewiesen.

Es ist von Interesse, auch für $u'_1 \neq 0$ (und $a_1 \neq 0$) Bedingungen der engeren Konvergenz anzugeben, d. h. Bedingungen, unter denen S_1 von 0 verschieden ist.

Ist speziell für den Kettenbruch (12.):

$$a_\nu = g_\nu x, \; b_\nu = 1,$$

wo die g_ν Konstanten sind, und ist x in einem Bereich T mit dem Nullpunkt im Innern variabel, so ist S_1 eine in T analytische Funktion und verschwindet in jedem abgeschlossenen *inneren* Teilbereich nur in endlich vielen Punkten, denn würde sie unendlich oft verschwinden, so müßte im ganzen Bereiche identisch $S_1 = 0$ sein und dann wäre identisch $\left[\frac{g_\nu x}{1}\right]_1^\infty = -1$, dies ist aber nach einem Satze des Herrn *Pringsheim* (a. S. 133, Fußn. **) a. O., Satz III) unmöglich.

Im allgemeinen kann es vorkommen, daß die Reihe S_1 in T identisch verschwindet; man muß daher, um einen Konvergenzbereich zu dem Kettenbruch (12.) angeben zu können, weitere Bedingungen einführen. Eine solche ist in dem einfachen Satze enthalten:

Zusatz zu Satz 1. *Sind die Bedingungen des Satzes* 1 *erfüllt und ist außerdem:*

$$(26.) \quad \left|\frac{a_1}{u'_1}\right| \leqq C, \; 3s_\nu + 2\vartheta_\nu - 2t_\nu \leqq 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei wenigstens einmal Ungleichheit gilt, so ist der Kettenbruch (12.) *konvergent.*

Man erhält nämlich Ungl. (26.), indem man

$$\frac{s_\nu - t_\nu + \vartheta_\nu}{1-s_\nu} \leqq \frac{1}{2} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

setzt; unter den obigen Bedingungen ist daher offenbar:

$$|S_1| > 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right),$$

also

$$|S_1| > 0. \quad \text{W. z. b. w.}$$

§ 2.

Über mehrgliedrig-limitärperiodische Kettenbrüche.

In besonderen Fällen läßt sich die Konvergenzbedingung des Zusatzes erweitern; ich will etwas genauer den Fall behandeln, daß der Kettenbruch (23′.) rein-periodisch ist.

Sei also:

$$d_{\nu+k} = d_\nu, \quad c_{\nu+k} = c_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

dann heißt der Kettenbruch (23′.) k-gliedrig reinperiodisch.

Jetzt folgt aus den Gleichungen B_1) und B_2):

$$u_{\nu+k} + u'_{\nu+k} = u_\nu + u'_\nu, \quad u_{\nu+k}\, u'_{\nu+k+1} = u_\nu u'_{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

setzt man insbesondere:

$$(27.) \quad u_{\nu+k} = u_\nu, \quad u'_{\nu+k} = u'_\nu, \quad \vartheta_{\nu+k} = \vartheta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so reduzieren sich die Bedingungen B_1), B_2) und B_3) auf die folgenden:

$$(28.) \quad u_\nu = d_\nu - u'_\nu \neq 0, \quad u'_\nu u'_{\nu+1} = -c_{\nu+1}, \quad \left|\frac{u'_\nu}{u_\nu}\right| \leqq \vartheta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k),$$

wobei $u'_{k+1} = u'_1$, $c_{k+1} = c_1$ ist.

Die Bedingung B_4) ist jetzt — wie man sich leicht überzeugt — gleichbedeutend mit der Ungleichheit:

$$(29.) \qquad \vartheta_1 \vartheta_2 \ldots \vartheta_k < 1 \text{*}).$$

Ich leite nun eine hinreichende Bedingung dafür ab, daß $S_1 \neq 0$ sei. Setzt man abkürzend:

$$\sigma = 1 + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{u'_1 u'_2 \ldots u'_\nu}{u_1 u_2 \ldots u_\nu},$$

so ist offenbar:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sigma + \sum_1^\infty{}_\nu \left[\frac{z'_1 \ldots z'_\nu}{z_1 \ldots z_\nu} - \frac{u'_1 \ldots u'_\nu}{z_1 \ldots z_\nu} + \frac{u'_1 \ldots u'_\nu}{z_1 \ldots z_\nu} - \frac{u'_1 \ldots u'_\nu}{u_1 \ldots u_\nu}\right] \\ &= \sigma + \sum_1^\infty{}_\nu \left[\prod_1^\nu{}_\lambda \left(\frac{z'_\lambda - u'_\lambda}{z_\lambda} + \frac{u'_\lambda}{z_\lambda}\right) - \frac{u'_1 \ldots u'_\nu}{z_1 \ldots z_\nu}\right] \\ &\quad + \sum_1^\infty{}_\lambda \left[\prod_1^\nu{}_\lambda \left(\left(\frac{u'_\lambda}{z_\lambda} - \frac{u'_\lambda}{u_\lambda}\right) + \frac{u'_\lambda}{u_\lambda}\right) - \frac{u'_1 \ldots u'_\nu}{u_1 \ldots u_\nu}\right], \end{aligned}$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} |S_1| \geqq |\sigma| &- \sum_1^\infty{}_\nu \left|\prod_1^\nu{}_\lambda \left(\frac{z'_\lambda - u'_\lambda}{z_\lambda} + \frac{u'_\lambda}{z_\lambda}\right) - \frac{u'_1 \ldots u'_\nu}{z_1 \ldots z_\nu}\right| \\ &- \sum_1^\infty{}_\nu \left|\prod_1^\nu{}_\lambda \left(\left(\frac{u'_\lambda}{z'_\lambda} - \frac{u'_\lambda}{u_\lambda}\right) + \frac{u'_\lambda}{u_\lambda}\right) - \frac{u'_1 \ldots u'_\nu}{u_1 \ldots u_\nu}\right|. \end{aligned}$$

---

*) $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$ seien Konstanten.

Rechnet man das allgemeine Glied unter den beiden Summenzeichen aus, schätzt die vorkommenden Größen mit Hilfe von (25.) ab und faßt die so entstehenden Ausdrücke wiederum zu Produkten zusammen, so erhält man:

$$|S_1| \geqq |\sigma| - \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\left[\prod_{1}^{\nu}{}^{\lambda}\frac{s_\lambda - t_\lambda + \vartheta_\lambda}{1-s_\lambda} - \prod_{1}^{\nu}{}^{\lambda}\frac{\vartheta_\lambda}{1-s_\lambda}\right] - \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\left[\prod_{1}^{\nu}{}^{\lambda}\frac{\vartheta_\lambda}{1-s_\lambda} - \prod_{1}^{\nu}{}^{\lambda}\vartheta_\lambda\right],$$

oder:

$$(30.) \qquad |S_1| \geqq |\sigma| - \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\left[\prod_{1}^{\nu}{}^{\lambda}\frac{s_\lambda - t_\lambda + \vartheta_\lambda}{1-s_\lambda} - \vartheta_1\vartheta_2\ldots\vartheta_\nu\right].$$

Wir müssen noch $|\sigma|$ abschätzen. Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{u_1' u_2' \ldots u_k'}{u_1 u_2 \ldots u_k} = \Pi_k,$$

so ist in dem vorhandenen Falle offenbar:

$$\sigma = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\Pi_k^{\nu} + \frac{u_1'}{u_1}\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\Pi_k^{\nu} + \cdots + \frac{u_1' u_2' \ldots u_{k-1}'}{u_1 u_2 \ldots u_{k-1}}\sum_{0}^{\infty}{}^{\nu}\Pi_k^{\nu},$$

oder:

$$\sigma = \frac{1}{1-\Pi_k}\left(1 + \frac{u_1'}{u_1} + \cdots + \frac{u_1' u_2' \ldots u_{k-1}'}{u_1 u_2 \ldots u_{k-1}}\right) \text{ für } k \geqq 2,$$

$$\sigma = \frac{1}{1-\Pi_k} \qquad \text{für } k = 1.$$

Hieraus folgt:

$$(31.) \begin{cases} |\sigma| \geqq \dfrac{1}{1+\vartheta_1\vartheta_2\ldots\vartheta_k}\left[1 - (\vartheta_1 + \cdots + \vartheta_1\vartheta_2\ldots\vartheta_{k-1})\right] \text{ für } k \geqq 2, \\ |\sigma| \geqq \dfrac{1}{1+\vartheta_1} \qquad \text{für } k = 1. \end{cases}$$

Es genügt nun, $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{k-1}$ einer solchen Bedingung zu unterwerfen, daß die rechte Seite in (31.) positiv ausfällt, dann lassen sich offenbar die s_ν und t_ν so nahe an Null wählen, daß auch die rechte Seite der Ungleichung (30.) positiv ausfällt. Es sind also $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{k-1}$ so einzuschränken, daß

$$(32.) \qquad 1 > \vartheta_1 + \vartheta_1\vartheta_2 + \cdots + \vartheta_1\vartheta_2\ldots\vartheta_{k-1} \text{ für } k \geqq 2$$

ist. (Für $k = 1$ ist stets $|\sigma| > 0$.)

Setzt man insbesondere

$$\vartheta_\nu = \vartheta \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k),$$

so ist die Bedingung B_4) mit der folgenden äquivalent:

$$\vartheta < 1;$$

und aus (32.) wird:

$$1 > \frac{\vartheta(1-\vartheta^{k-1})}{1-\vartheta} \text{ für } k \geqq 2;$$

d. h. allgemein:

$$1 - 2\vartheta + \vartheta^k > 0 \qquad (k \geqq 1).$$

Hieraus ist zunächst ersichtlich, daß man für $k = 1, 2$ zu einem $\vartheta < 1$ die s_ν und t_ν stets so bestimmen kann, daß der Kettenbruch konvergiert.

Für $k \geqq 3$ hat die Gleichung:

$$1 - 2\vartheta + \vartheta^k = 0 \tag{33.}$$

eine und nur eine Wurzel im Innern des Intervalles (0. 1), wie auch aus der Darstellung

$$1 - 2\vartheta + \vartheta^k = (1-\vartheta)[1 - (\vartheta + \vartheta^2 + \cdots + \vartheta^{k-1})]$$

erhellt. Bezeichnet man diese Wurzel mit $\vartheta^{(k)}$, so ist offenbar:

$$\vartheta^{(k)} > \frac{1}{2}.$$

Um eine genauere Schranke zu erhalten, setze man Gl. (33.) in die Form:

$$\vartheta = \frac{1+\vartheta^k}{2};$$

es folgt dann unmittelbar:

$$\vartheta^{(k)} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}};$$

und mit Hilfe dieser Schranke kann man wieder eine genauere ableiten.

Es genügt also jedenfalls, für den k-gliedrig periodischen Kettenbruch $(k \geqq 3)$

$$\vartheta \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

zu wählen.

Daß unter diesen Bedingungen der k-gliedrig periodische Kettenbruch (23′.) selbst konvergiert, ist leicht ersichtlich.

Wir haben also gezeigt, daß unter den Bedingungen (27.) und (30.) die s_ν, t_ν so bestimmt werden können, daß die Konvergenzbedingungen des Satzes 1 erfüllt sind. Man kann sogar in diesem Falle die s_ν, t_ν so bestimmen, daß sie oberhalb einer von ν unabhängigen positiven Schranke liegen. Denn wenn man

$$s_\nu = \varepsilon + \delta, \; t_\nu = \delta \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

setzt, so kann man offenbar die positiven Zahlen ε und δ so klein wählen,

daß $\sum_1^\infty{}_\nu \prod_1^\nu{}_\lambda \frac{\varepsilon+\vartheta_\lambda}{1-\delta}$ konvergiert und daß die rechte Seite der Ungl. (30.) positiv wird*).

Es kommt vor, daß die Bedingungen (27.)—(29.) nicht erfüllt werden können, aber dennoch solche s_ν, t_ν existieren, die den Konvergenzbedingungen des Satzes 1 genügen, wenn man $u_1' = 0$ setzt. Sei z. B.

$$(34.) \qquad c_\nu = -\frac{1}{4},\ d_\nu = 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

der Kettenbruch (23′.) wird also eingliedrig periodisch:

$$(35.) \qquad \left[\frac{c_\nu}{d_\nu}\right]_1^\infty = \left[\begin{matrix} -\frac{1}{4} \\ \hline 1 \end{matrix}\right];$$

die Beziehungen (28.) und (29.) gehen jetzt über in:

$$(36.) \qquad u + u' = 1,\ u \neq 0,\ uu' = \frac{1}{4},\ \left|\frac{u'}{u}\right| \leqq \vartheta < 1;$$

u' und u sind also die Wurzeln der Gleichung:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0,$$

daher:

$$u' = \frac{1}{2},\ u = \frac{1}{2},\ \frac{u'}{u} = 1;$$

die Bedingung (36.) ist also nicht erfüllt. Wir erhalten somit keine festen Werte $s_\nu = s$ und $t_\nu = t$, die den Konvergenzbedingungen des Satzes 1 genügen würden. Man überzeugt sich aber leicht, daß solche Werte gar nicht existieren. Denn schon der eingliedrig periodische Kettenbruch:

$$\left[\begin{matrix} -\frac{1}{4}-\varepsilon \\ \hline 1 \end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix} -\frac{1}{4}-\varepsilon \\ \hline 1 \end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix} -\frac{1}{4}-\varepsilon \\ \hline 1 \end{matrix}\right] + \cdots$$

divergiert bekanntlich für jeden positiven Wert von ε. Wir können aber den Konvergenzbedingungen des Satzes 1 genügen, wenn wir $u_1' = 0$ setzen. Bekanntlich ist (vgl. z. B. *Pringsheim*, a. S. 133, Fußn. **) a. O., S. 23) für den Kettenbruch (35):

$$Q_\nu = \frac{\nu+1}{2^\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

---

*) Unter anderen Voraussetzungen hat Herr *v. Pidoll* (a. a. O., § 4) die Existenz einer Umgebung für den mehrgliedrig periodischen Kettenbruch nachgewiesen.

also laut Formel (24.):

$$u_\nu = \frac{\nu+1}{2^\nu} : \frac{\nu}{2^{\nu-1}} = \frac{\nu+1}{2\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ferner folgt nun aus B_2) und (34.):

$$u'_{\nu+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\nu}{\nu+1} = \frac{\nu}{2(\nu+1)} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

also:

$$\frac{u'_\nu}{u_\nu} = \frac{\nu-1}{2\nu} : \frac{\nu+1}{2\nu} = \frac{\nu-1}{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ich setze nun:

$$\vartheta_\nu = \frac{\nu-1}{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

dann ist die Bedingung B_4) offenbar erfüllt. Ferner setze ich der Einfachheit halber:

$$t_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

schließlich sei

$$s_\nu = \frac{4}{3(\nu+1)(\nu+2)} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

man überzeugt sich leicht, daß jetzt auch die Bedingungen $B_5) - B_7$) erfüllt sind. Mit Hilfe einer leichten Rechnung erhält man auf diesem Wege für den Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ die Konvergenzbedingungen:

$$\left| a_{\nu+1} - \frac{1}{4} \right| \leqq \frac{2}{9\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

§ 3.

Eine Erweiterung des Hauptsatzes.

Man kann den Hauptsatz für einen speziellen Fall, der sich in der Anwendung von Wichtigkeit erweisen wird, etwas verallgemeinern.

Seien nämlich die $\frac{u'_\nu}{u_\nu}$ reelle und nichtpositive Größen — dies ist z. B. der Fall, wenn die c_ν, d_ν nicht negativ sind — sei ferner:

$$(37.) \qquad \left.\begin{aligned} -\frac{u'_\nu}{u_\nu} &= \tau_\nu \\ b_\nu &= d_\nu \\ t_\nu &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

dann folgt aus B_1) und (14):

$$u_\nu + u'_\nu = z_\nu + z'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

oder:

$$u'_\nu - z'_\nu = z_\nu - u_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nun ist:

$$\frac{z'_\nu}{z_\nu} = \frac{\frac{z'_\nu}{u_\nu}}{\frac{z_\nu}{u_\nu}} = \frac{\frac{u'_\nu}{u_\nu} + \frac{z'_\nu - u'_\nu}{u_\nu}}{1 - 1 + \frac{z_\nu}{u_\nu}} = \frac{\frac{u'_\nu}{u_\nu} + 1 - \frac{z_\nu}{u_\nu}}{1 - \left(1 - \frac{z_\nu}{u_\nu}\right)},$$

daher:

$$\left|\frac{z'_\nu}{z_\nu}\right| = \left|\frac{\tau_\nu - \left(1 - \frac{z_\nu}{u_\nu}\right)}{1 - \left(1 - \frac{z_\nu}{u_\nu}\right)}\right| \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ich beweise nun die Beziehungen:

$$\left|\frac{\tau_\nu - \left(1 - \frac{z_\nu}{u_\nu}\right)}{1 - \left(1 - \frac{z_\nu}{u_\nu}\right)}\right| \leqq \begin{cases} \dfrac{\tau_\nu + \left|1 - \frac{z_\nu}{u_\nu}\right|}{1 + \left|1 - \frac{z_\nu}{u_\nu}\right|} \leqq \dfrac{\tau_\nu + s_\nu}{1 + s_\nu} \text{ für } 1 \geqq \tau_\nu \geqq \left|1 - \dfrac{z_\nu}{u_\nu}\right|^2 \\ \left|\dfrac{\tau_\nu - \left|1 - \frac{z_\nu}{u_\nu}\right|}{1 - \left|1 - \frac{z_\nu}{u_\nu}\right|}\right| \leqq \dfrac{|\tau_\nu - s_\nu|}{1 - s_\nu} \text{ für } \begin{cases} \tau_\nu \geqq 1 \text{ und} \\ \tau_\nu \leqq \left|1 - \dfrac{z_\nu}{u_\nu}\right|^2. \end{cases} \end{cases}$$

Sei abkürzend:

$$-\left(1 - \frac{z_\nu}{u_\nu}\right) = r_\nu e^{i\varphi_\nu},$$

dann ist die Ungleichung

$$\left|\frac{\tau_\nu + r_\nu e^{i\varphi_\nu}}{1 + r_\nu e^{i\varphi_\nu}}\right| \leqq \frac{\tau_\nu + r_\nu}{1 + r_\nu}$$

gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\frac{\tau_\nu^2 + r_\nu^2 + 2\tau_\nu r_\nu \cos\varphi_\nu}{\tau_\nu^2 + r_\nu^2 + 2\tau_\nu r_\nu} \leqq \frac{1 + r_\nu^2 + 2r_\nu \cos\varphi_\nu}{1 + r_\nu^2 + 2r_\nu},$$

oder:

$$1 + \frac{2\tau_\nu r_\nu (\cos\varphi_\nu - 1)}{\tau_\nu^2 + r_\nu^2 + 2\tau_\nu r_\nu} \leqq 1 + \frac{2r_\nu (\cos\varphi_\nu - 1)}{1 + r_\nu^2 + 2r_\nu}$$

das heißt (da $\cos\varphi_\nu \leqq 1$ ist):

$$\tau_\nu + r_\nu^2 \tau_\nu + 2r_\nu\tau_\nu \geqq \tau_\nu^2 + r_\nu^2 + 2r_\nu\tau_\nu,$$

und nach einfacher Umformung:

$$\tau_\nu - \tau_\nu^2 \geqq r_\nu^2 (1 - \tau_\nu),$$

und dies führt in der Tat (da $r_\nu < 1$ ist) auf die Bedingung:

$$1 \geqq \tau_\nu \geqq r_\nu^2.$$

Unter dieser Bedingung ist auch:

$$\frac{\tau_\nu + r_\nu}{1 + r_\nu} \leqq \frac{\tau_\nu + s_\nu}{1 + s_\nu},$$

denn diese Ungleichung geht leicht in die folgende über:

$$r_\nu(1 - \tau_\nu) \leqq s_\nu(1 - \tau_\nu),$$

und mit Rücksicht auf (16.) ist dies für $\tau_\nu \leqq 1$ stets erfüllt.

Auf ähnliche Weise erhält man aus der Ungleichung:

$$\left| \frac{\tau_\nu + r_\nu e^{i\varphi_\nu}}{1 + r_\nu e^{i\varphi_\nu}} \right| \leqq \frac{|\tau_\nu - r_\nu|}{1 - r_\nu}$$

die folgende:

$$\tau_\nu + r_\nu^2 \tau_\nu - 2 r_\nu \tau_\nu \leqq \tau_\nu^2 + r_\nu^2 - 2 r_\nu \tau_\nu,$$

oder

$$\tau_\nu(1 - \tau_\nu) \leqq r_\nu^2(1 - \tau_\nu),$$

und dies ist dann erfüllt, wenn entweder $\tau_\nu \geqq 1$ oder $\tau_\nu \leqq r_\nu^2$ ist.

Unter diesen Bedingungen ist auch

$$\frac{|\tau_\nu - r_\nu|}{1 - r_\nu} \leqq \frac{|\tau_\nu - s_\nu|}{1 - s_\nu},$$

denn für $\tau_\nu \leqq r_\nu^2 (< r_\nu)$ ist dies unmittelbar ersichtlich, und für $\tau_\nu \geqq 1$ ist es gleichbedeutend mit der Ungleichung:

$$s_\nu(1 - \tau_\nu) \leqq r_\nu(1 - \tau_\nu),$$

welche offenbar auch erfüllt ist.

Man bezeichne nun zur Abkürzung den größeren der Ausdrücke

$$\frac{\tau_\nu + s_\nu}{1 + s_\nu} \text{ und } \frac{|\tau_\nu - s_\nu|}{1 - s_\nu}$$

mit (τ_ν, s_ν) und die größte der Zahlen: $\frac{\tau_\nu + s_\nu}{1 + s_\nu}$, $\frac{\tau_\nu}{1 - s_\nu}$, $\frac{s_\nu}{1 - s_\nu}$ mit $\{\tau_\nu, s_\nu\}$, dann ist offenbar:

$$(\tau_\nu, s_\nu) \leqq \{\tau_\nu, s_\nu\},$$

und nach dem Vorhergehenden

$$\left| \frac{z'_\nu}{z_\nu} \right| \leqq \{\tau_\nu, s_\nu\};$$

ferner ist für $\vartheta_\nu \geqq \tau_\nu$ auch $\{\vartheta_\nu, s_\nu\} \geqq \{\tau_\nu, s_\nu\}$.

Berücksichtigt man schließlich Satz 1, so erhält man unmittelbar den

Satz 2. Seien d_ν, c_ν ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$) reelle nicht negative Funktionen im Bereiche B; ferner sollen u_ν, u'_ν, ϑ_ν den Bedingungen genügen:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ u_1' = 0,\ \ u_\nu = d_\nu - u_\nu' \neq 0 \\ 2)\ u_\nu u_{\nu+1}' = -c_{\nu+1} \\ 3)\ \left|\dfrac{u_\nu'}{u_\nu}\right| \leqq \vartheta_\nu \end{array}\right\} (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

4) $\sum_2^\infty{}^\nu\, \vartheta_2 \vartheta_3 \ldots \vartheta_\nu$ *konvergiert gleichmäßig im Bereiche B.*

Endlich sei $s_\nu (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *eine Folge von Größen, die den Bedingungen genügen:*

$$\left.\begin{array}{l} 5)\ 0 \leqq s_\nu < 1 \\ 6)\ s_{\nu+1}(1 - s_\nu) \geqq \vartheta_{\nu+1} s_\nu \end{array}\right\} (\nu = 1, 2, 3 \ldots)$$

7) $\sum_2^\infty{}^\nu \prod_2^\nu{}^\lambda \{\vartheta_\lambda, s_\lambda\}$ *konvergiert gleichmäßig im Bereiche B.*

Wenn nun die $a_\nu (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ *Funktionen von irgend welchen Variabeln in B sind, die darin die Ungleichungen erfüllen:*

$$\left|\frac{a_1}{d_1}\right| \leqq C, \quad \left|\frac{a_\nu - c_\nu}{u_{\nu-1} u_\nu}\right| \leqq s_\nu (1 - s_{\nu-1}) - \vartheta_\nu s_{\nu-1} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

so konvergiert der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{d_\nu}\right]_1^\infty$ *gleichmäßig im Bereiche B.*

§ 4.

Spezialisierung der in den allgemeinen Sätzen auftretenden willkürlichen Parameter zur Ableitung einfacher Konvergenzkriterien.

Die eben entwickelten allgemeinen Sätze umfassen eine große Menge teils bekannter, teils neuer Konvergenzkriterien, je nach den Werten, die man den willkürlichen Parametern: $c_\nu, d_\nu (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ beilegt. Ich will dies für einige bemerkenswerte Fälle ausführen.

Sei

$$u_1' = 0,\ c_{\nu+1} = 0,\ d_\nu = 1,\ b_\nu = 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so folgt aus B_1) und B_2):

$$u_\nu' = 0,\ u_\nu = 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots.);$$

ferner sei

$$t_\nu = 0,\ \vartheta_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Satz 2 reduziert sich jetzt auf den folgenden:

Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$, dessen Teilzähler Funktionen von irgend welchen Variabeln im Bereiche B sind, konvergiert in B gleichmäßig, wenn

es eine Folge von Größen s_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ gibt, derart, daß die Bedingungen erfüllt sind:

$$0 \leqq s_\nu < 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$(38.) \qquad |a_1| \leqq C, \ |a_\nu| \leqq s_\nu (1 - s_{\nu-1}) \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

$$\sum_{2}^{\infty \nu} \prod_{2}^{\nu \lambda} \frac{s_\lambda}{1 - s_\nu} \text{ konvergiert gleichmäßig in } B.$$

Dasselbe Resultat ergibt sich übrigens auch aus Satz 1.

Dieser Satz ist nicht neu, sondern in einem allgemeineren Satze des Herrn *Pringsheim**) enthalten, wie man sofort erkennt, wenn man für s_ν die Größe $1 - \frac{1}{p_\nu}$ einführt. Die Reihe $\sum_{2}^{\infty \nu} \prod_{2}^{\nu \lambda} \frac{s_\lambda}{1 - s_\lambda}$ geht dann in die folgende über

$$\sum_{2}^{\infty \nu} \prod_{2}^{\nu \lambda} (p_\lambda - 1),$$

und gemäß dem *Pringsheim*schen Satze ist die Konvergenz dieser Reihe nur in dem Falle erforderlich, daß alle a_ν $(\nu \geqq 2)$ reell und negativ sind und in (38.) durchweg Gleichheit gilt.

Mit diesem Beispiel wollte ich nur andeuten, wie weit sich mein allgemeiner Satz speziell den bereits untersuchten Fällen anschmiegt.

Um neue Konvergenzkriterien zu gewinnen, muß man die c_ν, d_ν in geeigneter Weise spezialisieren; dies soll nun geschehen.

Im folgenden seien die c_ν, d_ν sämtlich reell und nicht negativ. Durch dieselben sind offenbar die u_ν, u'_ν völlig bestimmt. Auf den Zusammenhang dieser Größen miteinander muß ich etwas genauer eingehen.

Aus B_1) und B_2) erhält man leicht die Gleichungen

$$-u'_{\nu+1} = \frac{c_{\nu+1}|}{|d_\nu} = \frac{c_\nu|}{|d_{\nu-1}} + \cdots + \frac{c_3|}{|d_2} + \frac{c_2|}{|d_1 - u'_1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$u_1 = d_1 - u'_1, \ u_\nu = d_\nu + \frac{c_\nu|}{|d_{\nu-1}} + \cdots + \frac{c_3|}{|d_2} + \frac{c_2|}{|d_1 - u'_1} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots).$$

Bedeutet also Q_ν den Näherungsnenner ν-ter Ordnung des Kettenbruches

$$\frac{c_1|}{|d_1 - u'_1} + \frac{c_2|}{|d_2} + \frac{c_3|}{|d_3} + \cdots + \frac{c_\nu|}{|d_\nu} + \cdots$$

so ist, wie auch auf anderem Wege abgeleitet wurde (vgl. Formel (24.)):

$$(39.) \qquad u_\nu = \frac{Q_\nu}{Q_{\nu-1}} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

---

*) Über einige Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. [Münch. Sitz.-Ber. Bd. 35, 1905, S. 359—380.]

Ferner ist mit Rücksicht auf B_2):

$$(40.) \qquad u'_{\nu+1} = -\frac{c_{\nu+1} Q_{\nu-1}}{Q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

aus (39.) und (40.) folgt schließlich:

$$(41.) \qquad \frac{u'_{\nu+1}}{u_{\nu+1}} = -\frac{c_{\nu+1} Q_{\nu-1}}{Q_{\nu+1}} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Sei nun $u'_1 = 0$; es ist offenbar:

$$(42.) \qquad Q_{\nu-1} \geqq d_{\nu-1} Q_{\nu-2} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

daher:

$$Q_\nu \geqq (d_{\nu-1} d_\nu + c_\nu) Q_{\nu-2} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots);$$

hieraus folgt mit Rücksicht auf (39.):

$$(43.) \qquad u_{\nu-1} u_\nu \geqq d_{\nu-1} d_\nu + c_\nu \qquad (\nu = 2, 3, \ldots).$$

Ferner folgt:

$$0 \leqq \frac{Q_{\nu-2}}{Q_\nu} \leqq \frac{1}{d_{\nu-1} d_\nu + c_\nu} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

oder:

$$(44.) \qquad 0 \leqq \frac{c_\nu Q_{\nu-2}}{Q_\nu} \leqq \frac{c_\nu}{d_{\nu-1} d_\nu + c_\nu} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots);$$

nun ist:

$$\frac{c_\nu}{d_{\nu-1} d_\nu + c_\nu} = \frac{1}{1 + \frac{d_{\nu-1} d_\nu}{c_\nu}};$$

nimmt man noch an, daß die Ungleichungen bestehen:

$$0 \leqq \frac{c_\nu}{d_{\nu-1} d_\nu} \leqq \frac{\vartheta_\nu}{1-\vartheta_\nu} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

so erhält man demnach:

$$\frac{c_\nu Q_{\nu-2}}{Q_\nu} \leqq \frac{1}{1 + \frac{1-\vartheta_\nu}{\vartheta_\nu}} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

oder:

$$\frac{c_\nu Q_{\nu-2}}{Q_\nu} \leqq \vartheta_\nu \qquad (\nu = 2, 3, \ldots).$$

Vergleicht man dies mit (41.), so folgt:

$$(45.) \qquad \left|\frac{u'_\nu}{u_\nu}\right| \leqq \vartheta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Setzt man schließlich der Einfachheit halber

$$d_\nu = 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so folgt aus Satz 2 sofort der

Satz 3. Seien $c_\nu, \vartheta_\nu, s_\nu (\nu \geqq 1)$ *reelle nicht negative Funktionen im Bereiche B, die den Bedingungen genügen:*

$$(46.) \qquad 0 \leqq \vartheta_\nu \leqq 1, \quad 0 \leqq c_\nu \leqq \frac{\vartheta_\nu}{1-\vartheta_\nu} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

$\sum_2^\infty{}_\nu \vartheta_2 \vartheta_3 \ldots \vartheta_\nu$ *konvergiert gleichmäßig in B*

$$0 \leqq s_{\nu-1} < 1, \quad s_\nu (1 - s_{\nu-1}) \geqq \vartheta_\nu s_{\nu-1} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots).$$

$\sum_2^\infty{}_\nu \prod_2^\nu{}_\lambda \{\vartheta_\lambda, s_\lambda\}$ *konvergiert gleichmäßig in B.*

Wenn nun die a_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots.)$ *Funktionen von irgend welchen Variabeln in B sind, die darin die Ungleichungen erfüllen:*

$$(47.) \quad |a_1| \leqq C, \quad \left|\frac{a_\nu - c_\nu}{1 + c_\nu}\right| \leqq s_\nu (1 - s_{\nu-1}) - \vartheta_\nu s_{\nu-1} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

so konvergiert der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ *gleichmäßig in B.*

§ 5.

Fortsetzung; weitere Konvergenzsätze für Kettenbrüche der Form $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$.

Um aus Satz 3 geeignete speziellere Konvergenzkriterien abzuleiten, denke ich mir die a_ν gegeben und will die Willkürlichkeit, die in den c_ν liegt, dazu benutzen, bei Befriedigung der Ungleichung (46.) die linke Seite von (47.) möglichst klein zu machen.

Zunächst ist klar, daß die Ungleichungen (46.) und (47.) nur dann befriedigt werden können, wenn

$$(48.) \qquad \Re(a_\nu) > -1 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

ist (dabei ist $a_\nu = \Re(a_\nu) + i\Im(a_\nu)$); denn wäre (48.) etwa für $\nu = \varkappa$ nicht erfüllt, so wäre

$$\left|\frac{a_\varkappa - c_\varkappa}{1 + c_\varkappa}\right| \geqq 1$$

und (47.) könnte für $\nu = \varkappa$ auch nicht erfüllt sein. Ich nehme also an, daß die Bedingung (48.) erfüllt ist.

Ferner überzeugt man sich leicht, daß für

$$c_\nu = \frac{|a_\nu|^2 + \Re(a_\nu)}{1 + \Re(a_\nu)}$$

die linke Seite von (47.) zum Minimum wird, und zwar wird dann

$$\left|\frac{a_\nu - c_\nu}{1+c_\nu}\right| = \text{abs.}\ \frac{a_\nu[1+\Re(a_\nu)] - |a_\nu|^2 - \Re(a_\nu)}{1+2\Re(a_\nu)+|a_\nu|^2}$$
$$= \text{abs.}\ \frac{(1+a_\nu)[1+\Re(a_\nu)] - |1+a_\nu|^2}{|1+a_\nu|^2} = \left|\frac{\Im(a_\nu)}{1+a_\nu}\right|.$$

Wäre

$$|a_\nu|^2 + \Re(a_\nu) < 0,$$

so setze man $c_\nu = 0$.

Setzt man schließlich der Einfachheit halber:

$$(49.)\quad \vartheta_\nu = \vartheta,\ 0 < \vartheta < 1,\ s_\nu = \frac{1-\vartheta}{2} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so bedeutet jetzt $|\vartheta_\lambda, s_\lambda|$ die größte der Zahlen $\frac{1+\vartheta}{3-\vartheta}, \frac{2\vartheta}{1+\vartheta}, \frac{1-\vartheta}{1+\vartheta}$; also konvergiert $\sum_2^\infty{}^{\nu} \prod_2^{\nu}{}^{\lambda} |\vartheta_\lambda, s_\lambda|$ (man beachte, daß die Bedingung B_7) jetzt *nicht* erfüllt ist) und man erhält aus Satz 3 den

Satz 4. *Sei ϑ eine positive Konstante und kleiner als* 1; *wenn die a_ν Funktionen im Bereiche B sind, die den Ungleichungen genügen:*

$$(50.)\quad \frac{|a_\nu|^2 + \Re(a_\nu)}{1+\Re(a_\nu)} \leqq \frac{\vartheta}{1-\vartheta}$$

$$(51.)\quad \left|\frac{\Im(a_\nu)}{1+a_\nu}\right| \leqq \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^2 \text{ für } |a_\nu|^2 + \Re(a_\nu) \geqq 0$$

$$(52.)\quad |a_\nu| \leqq \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^2 \text{ für } |a_\nu|^2 + \Re(a_\nu) < 0$$
$$(\nu = 2, 3, \ldots),$$

so konvergiert der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ gleichmäßig in B. Die Konvergenz ist offenbar eine unbedingte.

Der durch diesen Satz angegebene Konvergenzbereich kann geometrisch in der (x, y)-Ebene veranschaulicht werden. Ungl. (50.) bedeutet, daß die $a = x + iy$ innerhalb oder am Rande eines Kreises liegen, dessen Mittelpunkt

$$x = -\frac{1-2\vartheta}{2(1-\vartheta)}, \qquad y = 0$$

und dessen Radius

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}(1-\vartheta)}\sqrt{1-2\vartheta+2\vartheta^2}$$

ist. Liegt ferner a_ν außerhalb oder am Rande des Kreises

$$(53.)\quad x^2 + y^2 + x = 0,$$

so muß es gemäß (51.) in dem Winkelraume liegen, dessen Achsen vom

Punkte $(x=-1,\ y=0)$ ausgehend die imaginäre Achse in den Punkten $x=0,\ y=\pm\frac{(1-\vartheta)^2}{\sqrt{2^4-(1-\vartheta)^4}}$ schneiden*). Liegt aber a_ν innerhalb des Kreises (53.), so folgt aus (52.), daß es innerhalb oder am Rande des Kreises

$$x^2+y^2=\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^4$$

liegen muß. Mit wachsendem ϑ wird der durch (50.) bestimmte Kreis beliebig groß, aber die Öffnung des Winkelraumes nimmt zugleich gegen Null ab.

Für

$$\vartheta=\frac{1}{2}$$

erhält man z. B. als Konvergenzbereich den schraffierten Teil der folgenden Figur:

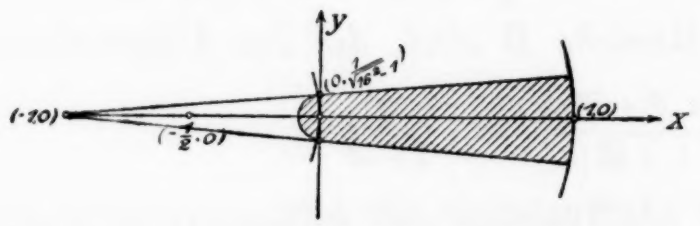

Fig. 1.

Ist

$$\frac{\sqrt{2(1-2\vartheta+2\vartheta^2)}-(1-2\vartheta)}{2(1-2\vartheta)}\leqq\frac{1}{4},$$

so fällt unser Konvergenzbereich vollständig in den Kreis:

$$x^2+y^2=\frac{1}{16}.$$

Dieser ist aber, wie Herr *Pringsheim* bewiesen hat (a. S. 133, Fußn. *) a. O., S. 322), selbst ein Konvergenzbereich. Man gelangt also zu dem Resultat, daß Satz 4 nur dann etwas Neues liefert, wenn

$$\vartheta>\frac{7-\sqrt{40}}{9}=0{,}075\ldots$$

ist.

Man kann natürlich die c_ν auch anders wählen und erhält so Konvergenzbereiche von mannigfacher Gestalt. Setzt man etwa:

$$c_\nu=\Re(a_\nu)\qquad(\nu=2,3,\ldots)$$

---

*) Die Gleichung dieses Geradenpaares ergibt sich aus (51.) wie folgt:
Es ist $\frac{y^2}{(1+x)^2+y^2}\leqq\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^4$ oder $y^2\left[1-\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^4\right]\leqq(1+x)^2\left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^4$.

und behält die Festsetzungen (49.) bei, so erhält man den Konvergenzbereich:

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqq \Re(\quad) &\leqq \frac{\vartheta}{1-\vartheta} \\ \left|\frac{\Im(a_\nu}{1+\Re(a_\nu)}\right| &\leqq \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^2 \end{aligned}\right\} (\nu = 2, 3, \ldots).$$

Für $\vartheta = \frac{1}{2}$ z. B. wird der Konvergenzbereich durch den schraffierten Teil der folgenden Figur angegeben:

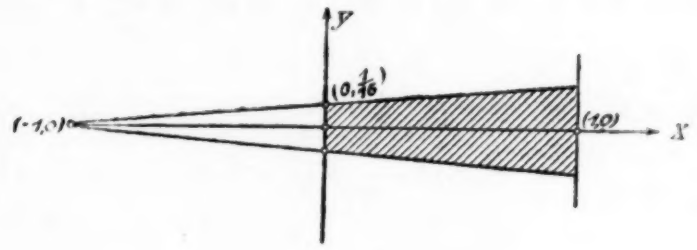

Fig. 2.

Ich habe in einer früheren Arbeit*) den Kettenbruch $\left[\frac{r_\nu e^{\varphi_\nu i}}{1}\right]_1^\infty$ absolut konvergent genannt, wenn er bei beliebiger Abänderung der Charakteristiken $e^{\varphi_\nu i}$ konvergiert und habe dort einige Konvergenzbedingungen angegeben, welche nicht-absolut konvergente Kettenbrüche liefern. Es ist klar, daß auch Satz 4 in diese Kategorie gehört; denn ist $\varphi_\nu = \pi$, so kann bekanntlich der Kettenbruch schon divergieren, falls nur die obere Grenze der r_ν größer als $\frac{1}{4}$ ist. Hierher gehören auch einige Sätze des Herrn *v. Pidoll* (a. a. O., § 1, Sätze 5—7).

§ 6.

Anwendung der Sätze auf Kettenbrüche der Form $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$.

Um für den Kettenbruch

$$\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots \tag{54.}$$

Konvergenzsätze zu gewinnen, kann man nun zwei Wege einschlagen. Man setzt in Satz 1 $a_\nu = c_\nu = 1$ $(\nu \geqq 1)$ und führt dann weitere Spezialisierungen ein; oder man kann mit Hilfe der bekannten Äquivalenz (vgl. z. B. *Perron*, Lehrbuch, S. 197):

*) Über gewisse unendliche Kettenbruchdeterminanten und Kettenbrüche mit komplexen Elementen, S. 348. [Münch. Sitz.-Ber., Jahrg. 1912, S. 323—361.]

$$(55.) \qquad \left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv \left[\frac{1}{\frac{b_1}{1}}, \frac{1}{\frac{b_{\nu-1}b_\nu}{1}}\right]_2^\infty \qquad (b_\nu \neq 0)$$

die Sätze 3 und 4 auf den Kettenbruch (54.) übertragen.

Ich will beide Wege verfolgen, da beide Male verschiedene Resultate erzielt werden.

Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, betrachte ich nur den speziellen Fall:

$$\vartheta_\nu = \vartheta,\ s_\nu = a(1-\sqrt{\vartheta}),\ 0 \leqq \vartheta < 1,\ 0 < \alpha < 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

ferner sei:

$$u_1' = 0,\ a_\nu = c_\nu = 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$t_1 = \alpha(1-\sqrt{\vartheta}),\ t_{\nu+1} = s_{\nu+1} - \frac{\vartheta_{\nu+1}s_\nu}{1-s_\nu} = \frac{\alpha(1-\sqrt{\vartheta})[1-\alpha+\alpha\sqrt{\vartheta}-\vartheta]}{1-\alpha(1-\sqrt{\vartheta})} \quad (\nu=1,2,3,\ldots).$$

Schließlich sei:

$$d_\nu > 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und

$$\frac{1}{d_\nu d_{\nu+1}} \leqq \frac{\vartheta}{1-\vartheta} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

dann ist wegen (39.) und (45):

$$u_\nu \geqq d_\nu,\ \left|\frac{u_\nu'}{u_\nu}\right| \leqq \vartheta \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Endlich beachte man, daß jetzt

$$\frac{\vartheta_\lambda + s_\lambda - t_\lambda}{1-s_\lambda} = \frac{\vartheta + \frac{\vartheta\alpha(1-\sqrt{\vartheta})}{1-\alpha(1-\sqrt{\vartheta})}}{1-\alpha(1-\sqrt{\vartheta})} = \frac{\vartheta}{(1-\alpha(1-\sqrt{\vartheta}))^2}$$

ist und daß dies kleiner ist als 1*). Dann folgt aus Satz 1 der

Satz 5. Seien $d_\nu (\nu \geqq 1)$ reelle positive Funktionen von irgend welchen Variabeln im Bereiche B; ϑ, α Konstanten, die den Bedingungen genügen:

$$0 \leqq \vartheta < 1,\ 0 < \alpha < 1,$$

$$d_\nu d_{\nu+1} \geqq \frac{1-\vartheta}{\vartheta} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

wenn nun die $b_\nu (\nu \geqq 1)$ Funktionen in B sind, die darin die Ungleichungen erfüllen:

$$\left|\frac{1}{b_1}\right| \leqq C,\ \left|\frac{b_1-d_1}{d_1}\right| \leqq \alpha(1-\sqrt{\vartheta}),\ \left|\frac{b_\nu-d_\nu}{d_\nu}\right| \leqq \frac{\alpha(1-\sqrt{\vartheta})[1-\alpha+\alpha\sqrt{\vartheta}-\vartheta]}{1-\alpha(1-\sqrt{\vartheta})} (\nu=2,3,\ldots),$$

so konvergiert der Kettenbruch $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ gleichmäßig in B.

---

*) Dies heißt nämlich $\sqrt{\vartheta} < 1-\alpha(1-\sqrt{\vartheta})$ oder $(1-\alpha)\sqrt{\vartheta} < 1-\alpha$, und dies ist offenbar richtig.

Setzt man hingegen in Satz 3:

$$a_1 = \frac{1}{b_1}, \quad a_\nu = \frac{1}{b_{\nu-1} b_\nu} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

$$\vartheta_\nu = \vartheta, \quad s_\nu = \frac{1-\vartheta}{2} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so erhält man mit Rücksicht auf (55.) den

Satz 6. Seien die c_ν reelle nicht-negative veränderliche Größen, die den Bedingungen genügen:

$$(55.) \qquad 0 \leqq c_\nu \leqq \frac{\vartheta}{1-\vartheta}, \quad 0 < \vartheta < 1 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

wenn dann die b_ν die Ungleichungen erfüllen:

$$(56.) \quad b_\nu \neq 0, \quad \left|\frac{1}{b_1}\right| \leqq C, \quad \left|\frac{\frac{1}{b_{\nu-1} b_\nu} - c_\nu}{1 + c_\nu}\right| \leqq \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^2 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

so konvergiert der Kettenbruch $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ gleichmäßig in B.

Speziell Satz 4 liefert hier die Konvergenzbedingungen:

$$\frac{\left|\frac{1}{b_{\nu-1} b_\nu}\right|^2 + \Re\left(\frac{1}{b_{\nu-1} b_\nu}\right)}{1 + \Re\left(\frac{1}{b_{\nu-1} b_\nu}\right)} \leqq \frac{\vartheta}{1-\vartheta},$$

$$\left|\frac{\Im\left(\frac{1}{b_{\nu-1} b_\nu}\right)}{1 + \frac{1}{b_{\nu-1} b_\nu}}\right| \leqq \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^2 \text{ für } \left|\frac{1}{b_{\nu-1} b_\nu}\right|^2 + \Re\left(\frac{1}{b_{\nu-1} b_\nu}\right) \geqq 0,$$

$$\left|\frac{1}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^2 \text{ für } \left|\frac{1}{b_{\nu-1} b_\nu}\right|^2 + \Re\left(\frac{1}{b_{\nu-1} b_\nu}\right) < 0$$

$$(\nu = 2, 3, \ldots).$$

Man kann diese Bedingungen auf eine übersichtlichere Gestalt bringen: offenbar ist

$$|b_{\nu-1} b_\nu|^2 \Re\left(\frac{1}{b_{\nu-1} b_\nu}\right) = \Re(b_{\nu-1} b_\nu), \quad |b_{\nu-1} b_\nu|^2 \Im\left(\frac{1}{b_{\nu-1} b_\nu}\right) = -\Im(b_{\nu-1} b_\nu),$$

also lauten die Bedingungen:

$$\frac{1 + \Re(b_{\nu-1} b_\nu)}{|b_{\nu-1} b_\nu|^2 + \Re(b_{\nu-1} b_\nu)} \leqq \frac{\vartheta}{1-\vartheta},$$

$$\frac{|b_{\nu-1} b_\nu|\,|1 + b_{\nu-1} b_\nu|}{|\Im(b_{\nu-1} b_\nu)|} \geqq \left(\frac{2}{1-\vartheta}\right)^2 \text{ für } \Re(b_{\nu-1} b_\nu) \geqq -1,$$

$$|b_{\nu-1} b_\nu| \geqq \left(\frac{2}{1-\vartheta}\right)^2 \text{ für } \Re(b_{\nu-1} b_\nu) < -1$$

$$(\nu = 2, 3, \ldots).$$

Sei schließlich

$$b_\nu = q_\nu e^{\psi_\nu i};$$

dann lauten die Bedingungen nach einfacher Umformung;

$$\frac{1+q_{\nu-1}q_\nu\cos(\psi_{\nu-1}+\psi_\nu)}{q_{\nu-1}^2q_\nu^2+q_{\nu-1}q_\nu\cos(\psi_{\nu-1}+\psi_\nu)} \leqq \frac{\vartheta}{1-\vartheta},$$

$$\frac{\sin^2(\psi_{\nu-1}+\psi_\nu)}{q_{\nu-1}^2q_\nu^2+2q_{\nu-1}q_\nu\cos(\psi_{\nu-1}+\psi_\nu)+1} \leqq \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^4 \text{ für } q_{\nu-1}q_\nu\cos(\psi_{\nu-1}+\psi_\nu) \geqq -1,$$

$$\frac{1}{q_{\nu-1}q_\nu} \leqq \left(\frac{1-\vartheta}{2}\right)^2 \text{ für } q_{\nu-1}q_\nu\cos(\psi_{\nu-1}+\psi_\nu) < -1,$$

$$(\nu = 2, 3, \ldots)^*).$$

---

*) Ein viel eleganteres Konvergenzkriterium für den Kettenbruch (54.) stammt von Herrn *van Vleck* (On the convergence of continued fractions with complex elements. [Transact. Americ. Math. Soc. 2, 1901, p. 215—233.]): Nimmt man an, daß $\Re(b_\nu) \geqq 0 (\nu \geqq 1)$ ist, und gibt es eine positive Zahl ε, derart, daß $\Re(b_\nu) \geqq \varepsilon |\Im(b_\nu)| (\nu \geqq 1)$, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Kettenbruches (54.) darin, daß $\sum_1^\infty{}^\nu |b_\nu|$ divergiert und daß $b_{2\nu-1}$ für mindestens ein ν von Null verschieden ist.

Herr *Jensen* (Bidrag til Kaedebrøkernes Teori. Festskrift til *H. G. Zeuthen*, 1909, p. 78—87; vgl. auch *Perron*, Lehrbuch, § 54) hat diesen Satz genauer und einfacher bewiesen.

Ferner sei auf das folgende allgemeine Konvergenzkriterium des Herrn *Pringsheim* (a. S. 133, Fußn. *) und S. 152 a. O.) hingewiesen: Der Kettenbruch (54.) konvergiert, wenn

$$\frac{1}{|b_{2\nu-1}|} + \frac{1}{|b_{2\nu}|} \leqq 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist; oder auch (abgesehen von einem gewissen Ausnahmefall), wenn

$$\frac{1}{|b_1 b_2|} \leqq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{|b_{2\nu-2}b_{2\nu-1}|} + \frac{1}{|b_{2\nu-1}b_{2\nu}|} \leqq \frac{1}{2} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

ist.

Schließlich sei auf eine bemerkenswerte Arbeit von *Julius Worpitzky* [Untersuchungen über die Entwickelung der monodromen und monogenen Funktionen durch Kettenbrüche. Friedrichs-Gymnasium und Realschule, Jahresbericht (S. 3—39), Berlin 1865, Buchdruckerei von G. Lange] aufmerksam gemacht, die wenig bekannt zu sein scheint. [Vgl. auch: The Boston Colloquium. Lectures on Mathematics. New York 1905; III. *E. B. van Vleck*, Selected Topics in the Theory of Divergent Series and of Continued Fractions (p. 75—167), S. 140, Fußn., und S. 147.] *Worpitzky* bewies (a. a. O., § 22), daß der Kettenbruch $\left[\frac{1}{1}, \frac{a_\nu x}{1}\right]_1^\infty$ unter der Bedingung $|a_\nu| \leqq a$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ für $|x| \leqq \frac{1}{4a}$ konvergiert und eine synektische Funktion von x darstellt. Spätere Beweise dieses Satzes gaben die Herren *van Vleck* und *Pringsheim*. Der Beweis von *Worpitzky* enthält zwar eine kleine Lücke; die ist aber leicht auszufüllen. Aus seiner Überlegung läßt sich auch unmittelbar die Gleichmäßigkeit der Konvergenz erschließen.

Problematische Punkte und die elementaren Sätze, die zum Beweise des *Picard*schen Theorems dienen.

Von Herrn *F. Schottky* in Berlin.

Riemann sagt am Anfang seiner Dissertation: „Eine veränderliche komplexe Größe w heißt eine Funktion einer andern veränderlichen komplexen Größe z, wenn sie mit ihr sich so ändert, daß der Wert des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz}$ unabhängig von dem Werte des Differentials dz ist.“ Aus dieser Definition folgt, wie jetzt ausreichend bewiesen ist: Wenn z_0 ein Punkt ist innerhalb eines Gebiets, in dem diese *Riemann*sche Voraussetzung besteht, so läßt sich w in einem Kreise um z_0, der bis zur Grenze reicht, durch eine Potenzreihe von $z - z_0$ darstellen. Es ist demnach gleichgültig, ob man zur Definition der in einem Gebiet regulären Funktion die Potenzentwicklung zur Voraussetzung macht, oder, mit *Cauchy* und *Riemann*, den vom Differential der Variabeln unabhängigen Differentialquotienten.

Statt z benutzen wir lieber den Buchstaben x, das von alters her gewohnte Zeichen für Unbekannte und Veränderliche. — Es kann vorkommen, daß die Größe w in einem kleinen Teil der Ebene, den man gerade betrachtet, zwar im allgemeinen als eindeutige reguläre Funktion von x gegeben ist, daß aber ein Punkt $x = a$ inmitten des Gebiets liegt, in bezug auf den nichts vorausgesetzt ist, nicht einmal ein bestimmter Wert von w. So lange nichts hinzugefügt wird, kann der fragliche Punkt für w ein regulärer oder singulärer sein. Aber ergänzende Bedingungen, die

scheinbar sehr wenig fordern, machen ihn zum regulären oder nur unwesentlich singulären. Nehmen wir mit *Riemann* an, daß das Produkt $(x-a)w$ zugleich mit $x-a$ entschieden unendlich klein wird, so nähert sich w selbst bei der Annäherung von x an a einem bestimmten endlichen Werte. Dieser Wert ist der Funktion für $x=a$ beizulegen. Sie ist dann eine auch im Punkte $x=a$ reguläre Funktion von x (vgl. den „Lehrsatz“ in *Riemanns* Dissertation). *Riemann* nimmt noch eine kleine Erweiterung vor. Man stelle die schwächere Bedingung, daß das Produkt $(x-a)^m w$, in dem m eine ganze Zahl, höher als 1, bedeutet, gleichzeitig mit $x-a$ verschwinde. Dann gilt von $(x-a)^{m-1}w$ dasselbe wie vorhin für w; w selbst ist entweder regulär für $x=a$, oder es ist darstellbar als Summe von zwei Teilen; der eine ist für $x=a$ regulär, der andere eine rationale Funktion, die nur für $x=a$ unendlich wird, höchstens von der $(m-1)$-ten Ordnung. Als Wert von w im Punkte a kann im letzteren Falle nur das Zeichen ∞ gelten; man sagt, daß im Punkte a die Funktion w zwar nicht regulär, aber nur unwesentlich singulär ist.

Statt der *Riemann*schen ergänzenden Bedingung nehmen wir jetzt eine andere: Es soll Werte geben, die die Funktion w innerhalb der betrachteten Umgebung von a nicht erreicht, denen w auch nicht beliebig nahekommt. Wenn c einer dieser Werte ist, so existiert ein positives δ von der Art, daß $w-c$ größer als δ bleibt, so lange x das gegebene Gebiet nicht überschreitet. — Auch in diesem Falle ist der Punkt $x=a$ kein wesentlich singulärer. Denn setzt man: $\frac{1}{w-c}=W$, so genügt W ebenso wie w der Differentialquotienten-Bedingung, ferner bleibt W in der betrachteten Umgebung von a kleiner als $\frac{1}{\delta}$, somit wird $(x-a)W$ gleichzeitig mit $x-a$ unendlich klein, und W ist gleich einer auch im Punkte a regulären Funktion. Dann kann $w=c+W^{-1}$ in diesem Punkte nicht wesentlich singulär sein.

Durch die Bedingung, daß $w-c$ im betrachteten Gebiete größer als δ bleibe, sind unendlich viele Werte gegeben, die w in der Figur *nicht* annimmt: alle die, die sich von c um weniger als δ unterscheiden. Viel weiter geht der *Picard*sche Satz: Sind auch nur zwei endliche Werte bekannt, die w in irgendeiner Umgebung von a nicht annimmt, so folgt

daraus, daß der Punkt a kein wesentlich singulärer ist. Oder: Soll a ein wesentlich singulärer Punkt sein, so ist es möglich, daß w *einen* Wert in der Umgebung von a nicht erreicht oder nur in einer endlichen Zahl von Punkten, jeden anderen nimmt sie unendlich oft an in jedem noch so kleinen Kreise um a. Dieser Satz schließt sich seinem Inhalt nach an die vorigen an, die so leicht zu beweisen sind, und deshalb könnte er eine Stelle am Anfang der Funktionentheorie erhalten. In *Picards* Traité d'Analyse wird er erst im dritten Bande aufgestellt, nach umfangreichen Vorbereitungen. Der Beweis ist durchaus nicht elementar; es werden dafür die elliptische Modulfunktion und noch höhere Transzendenten verwendet. Eine Überraschung war es, als *Borel* 1896 zeigte, daß man in dem besonderen Falle, wo die Funktion w außer der Stelle $x = a$ gar keinen singulären Punkt hat, mit Logarithmen oder Exponentialgrößen auskommen kann. *Picard* hob in einem Nachwort zur *Borel*schen Analyse deren bewundernswerte Tiefe hervor, bezweifelte aber, daß der Beweis des allgemeinen Theorems sich in derselben Weise würde führen lassen, und in diesem Zweifel lag für mich ein neues Problem. Es ist wirklich möglich, auch den größeren Satz durch eine Analyse der *Borel*schen Art zu beweisen, indem man an Stelle der Modulfunktion $\omega = \varphi(s)$ zwei Logarithmen, $\log(s)$ und $\log(1-s)$ betrachtet, die zusammengenommen dieselben drei singulären Punkte $s = 0$, $s = 1$, $s = \infty$ haben, wie die höhere Transzendente. Die von *Borel* für den speziellen Fall entwickelte Analyse kommt dabei zur Verwendung, aber sie reicht nicht aus. Es verhält sich so wie bei *Lindemanns* Beweis, daß die Zahl π eine transzendente ist. Auch dieser beruht zum Teil auf Sätzen, die von *Hermite* für die Zahl e aufgestellt waren, aber damit allein war es nicht getan. — Solche Beweise, zu denen verschiedene Mathematiker Bausteine liefern, haben das Eigentümliche, daß sie zuerst nicht in der einfachsten Form erscheinen. Man richtet sich unwillkürlich nach den Vorgängern, auch da, wo es besser wäre, entschieden von ihnen abzuweichen. Deshalb komme ich doch noch einmal auf die Grundgedanken zurück, die zum elementaren Beweise des *Picard*schen Satzes führen.

§ 1.

Zwei Eigenschaften des Logarithmus.

Alle Werte, die die vieldeutige Funktion $\log(x)$ bei gegebenem x hat, sind absolut genommen größer als $1-x$ oder als $1-\frac{1}{x}$. Von $x=1$ abgesehen, wo einer der Werte von $\log(x)$ gleich 0 ist.

Es werde $\log(x) = \log(\varrho) + i\varphi$ gesetzt; ϱ ist die Länge des Vektors von 0 bis x, φ der Winkel, den er mit der positiven Richtung bildet. Die Norm von $\log(x)$, das Quadrat des absoluten Wertes, ist $(\log(\varrho))^2+\varphi^2$, die Norm von $1-x$: $1+\varrho^2-2\varrho\cos\varphi$. Dies ist gleich $(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{\varphi}{2}$. Nehmen wir ϱ kleiner als 1 an, so ist $-\log\varrho$ positiv und größer als $1-\varrho$, φ^2 ist größer, wenigstens nicht kleiner, als $4\varrho\sin^2\frac{\varphi}{2}$; die Norm von $\log(x)$ ist also größer als die von $1-x$. Auch wenn $\varrho=1$ ist, und φ von 0 verschieden, findet dasselbe statt. Ist aber ϱ größer als 1, so ist $\log\varrho$ größer als $1-\frac{1}{\varrho}$, φ^2 nicht kleiner als $\frac{4}{\varrho}\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, und daraus folgt, daß die Norm von $\log(x)$ größer als die von $1-\frac{1}{x}$ ist. —

Die andere Eigenschaft besteht in folgendem. Es sei f eine Funktion von x, regulär in einem gegebenen Kreise, die im Mittelpunkt P_0 gleich 1 ist, in der ganzen Figur von 0 verschieden und am Rande kleiner als eine positive Zahl ω bleibt; P_1 sei ein zweiter Punkt innerhalb des Kreises; das Verhältnis des Radius ϱ zur Entfernung δ des Punktes P_1 vom Rande werde mit ν bezeichnet: $\nu=\frac{\varrho}{\delta}$. Wir bilden die in P_0 verschwindende, in der ganzen Figur reguläre Funktion $g=\log(f)$. Dann ist der Wert von g im Punkte P_1 kleiner als die positive Zahl $\eta=(2\nu-2)\log(\omega)$.

Daß η positiv ist, ist klar. Wenn f am Rande kleiner als ω ist, so ist es auch im Innern kleiner als ω, auch in P_0; es ist daher 1 kleiner als ω und $\log(\omega)$ positiv.

Setzen wir: $\log(\omega)=m$. Da f kleiner als ω ist, so liegt der reelle Teil von g, der gleich dem Logarithmus des absoluten Wertes von f ist, unterhalb m. Der reelle Teil von $g-m$ ist daher in der ganzen

Figur negativ. Dann liegt $g-m$ näher an $-m$ als an $+m$, g näher an 0 als an $2m$, g ist kleiner als $g-2m$, der Quotient von g durch $g-2m$ kleiner als 1. Da er in P_0 verschwindet, so ist nicht nur dieser Quotient, sondern auch sein Produkt mit $\frac{\varrho}{x-x_0}$, wo x_0 den Wert von x in P_0 bedeutet, in der ganzen Figur regulär; auch dieses Produkt nimmt seinen größten Wert am Rande an. Am Rande ist aber der eine Faktor kleiner als 1, der andere absolut genommen gleich 1; folglich ist das Produkt in P_1 kleiner als 1. In P_1 ist der zweite Faktor, absolut genommen, gleich $\frac{\varrho}{\varrho-\delta}$, also gleich $\frac{\nu}{\nu-1}$; daher ist im Punkte P_1

$$\frac{g}{g-2m}\cdot\frac{\nu}{\nu-1}$$

kleiner als 1. Dann muß $1-\frac{2m}{g}$ größer als $\frac{\nu}{\nu-1}$ sein, $\frac{2m}{g}$ muß größer sein als

$$\frac{\nu}{\nu-1}-1=\frac{1}{\nu-1},$$

g kleiner als $(2\nu-2)m$, was zu beweisen war.

Aus dem Satz läßt sich eine bemerkenswerte Folgerung ziehen. f kann in P_1 nicht beliebig klein sein; der reziproke Wert von f ist dort kleiner als $\omega^{2\nu-2}$.

Denn wenn g kleiner als η ist, so liegt der reelle Teil von g zwischen η und $-\eta$; es liegt also der Logarithmus des absoluten Wertes von f zwischen $\eta=\log(\omega^{2\nu-2})$ und der entgegengesetzten Größe; f, absolut genommen, zwischen $\omega^{2\nu-2}$ und $\omega^{2-2\nu}$.

§ 2.

Eigenschaften der Funktion, die in einem Kreise regulär ist und dort weder 0 noch 1 wird.

Gegeben sei eine Funktion s von x, regulär innerhalb eines Kreises $\mathfrak{K}$ und auf dem Kreise selbst, die in dieser Figur nirgends den Wert 0 und nirgends den Wert 1 hat. Für einen Punkt der Figur — wir wählen den Mittelpunkt P_0 — kann der Wert von s offenbar willkürlich vorgeschrieben sein, als eine beliebige von 0 und 1 verschiedene Konstante s_0. Aber für keinen zweiten. Nehmen wir einen zweiten P_1 im

Innern des Kreises, so ist der Wert s_1, den s in P_1 haben kann, beschränkt, er kann weder beliebig groß sein noch beliebig nahe an 0 oder 1 liegen. Die Beschränkungen sind allerdings sehr gering, entsprechend den geringen Voraussetzungen über die Funktion s.

Man braucht, um Schranken aufzustellen, innerhalb deren s_1 sich bewegen darf, nicht den Wert s_0 selbst, sondern eine mit s_0 zusammenhängende positive Größe $\varkappa$. Wir wählen $\varkappa$ so, daß $\varkappa$ größer ist als alle sechs Verhältnisse der Seiten des Dreiecks, das durch die Punkte 0, 1, s_0 gebildet ist. Demnach sind die Verhältnisse von 1, s_0 und $1-s_0$ absolut genommen kleiner als $\varkappa$ und größer als $\frac{1}{\varkappa}$, $\varkappa$ selbst größer als 1. Wenn $\varkappa$ gegeben ist, so ist damit s_0 nicht bestimmt, aber eingeengt, und dieser Einschränkung von s_0 entspricht eine sehr wesentlich kleinere von s_1. Sie besteht darin: Die stetige Änderung Δ, die der Logarithmus von s auf dem geraden Wege von P_0 nach P_1 erfährt — einer der Werte von $\log\left(\frac{s_1}{s_0}\right)$ — ist kleiner als die positive Größe

$$D = K n^3.$$

Dabei bedeutet K eine Größe, die $\varkappa$ proportional ist, sich aber von $\varkappa$ um einen großen numerischen Faktor, um 2^{12} unterscheidet:

$$K = 2^{12}\varkappa,$$

während n das Verhältnis des Radius r zum Abstand des Punktes P_1 vom Rande bedeutet:

$$n = \frac{r}{d}.$$

Der Ausdruck D ist so gewählt, daß er eine bestimmte Bedingung erfüllt, zu der wir erst später kommen. Wir können ihn als Funktion von d bezeichnen: $D = \varphi(d)$. Für alle Werte von d zwischen 0 und r ist $\varphi(d)$ größer als 2^{12} und wächst unbegrenzt mit abnehmendem d.

Wenn Δ kleiner als D ist, so liegt der Logarithmus des absoluten Wertes von $\frac{s_1}{s_0}$ zwischen D und $-D$, $\frac{s_1}{s_0}$ ist kleiner als e^D und größer als e^{-D}. Da s_0 kleiner als $\varkappa$ und größer als $\frac{1}{\varkappa}$ ist, so folgt hieraus, daß s_1 und $\frac{1}{s_1}$ kleiner als $E = \varkappa e^D$ sind. Aber auch $\frac{1}{1-s_1}$ ist kleiner als E, denn

die Funktion $1-s$ genügt denselben Bedingungen wie s. Demnach liegt s_1 außerhalb bestimmter sehr kleiner Kreise um 0 und 1, innerhalb eines sehr großen, aber die Radien der Kreise sind so klein oder so groß, daß man sie nicht zeichnen kann.

Der Beweis, daß $\triangle$ kleiner als D ist, ist ein sehr eigentümlicher; mehrere Mathematiker haben zu ihm beigetragen.

Wir setzen $t = 1 - s$, so daß wir zwei Funktionen haben, durch die Gleichung $s + t = 1$ verbunden, die beide in der Figur nirgends 0 werden. Die Werte der auftretenden variabeln Größen in den Punkten P_0, P_1 bezeichnen wir ebenfalls durch die Indizes 0 und 1. $\frac{s}{s_0}, \frac{t}{t_0}$ sind dann Funktionen, die in der Figur nicht verschwinden, in P_0 gleich 1 werden. Ihre in P_0 verschwindenden Logarithmen

$$u = \log\left(\frac{s}{s_0}\right), \quad v = \log\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

sind ebenfalls in der Figur reguläre Funktionen von x; der Wert von u in P_1 ist die Größe $\triangle$. Wir setzen voraus, daß u und v auf dem Kreise, demnach auch im Innern, kleiner als eine positive Zahl A bleiben, die größer als 1 ist. Wir führen den größeren Wert ein:

$$B = 2\varkappa A$$

und behaupten, daß $\frac{t_0}{t}$ im Punkte P_1 kleiner ist als B^{2n}.

Ist t_1, der Wert von t in P_1, größer als $\frac{1}{2}$, so ist die Behauptung offenbar richtig. Denn dann ist $\frac{t_0}{t_1}$ kleiner als $2t_0$; $2t_0$ ist aber kleiner als $2\varkappa$, da die Verhältnisse von $1, s_0, t_0$ kleiner als $\varkappa$ sind. $2\varkappa$ ist kleiner als B, B kleiner als B^{2n}; es ist also $\frac{t_0}{t_1}$ kleiner als B^{2n}.

Ist t_1 nicht größer als $\frac{1}{2}$, so ist einer der Werte von $\log(s_1) = \log(1 - t_1)$ durch die stark konvergente Reihe dargestellt: $-t_1 - \frac{1}{2}t_1^2 -$ usw., deren Wert in diesem Falle offenbar kleiner als $2t_1$ ist. Wir definieren die Funktion $\lambda = \log(s)$ für unsere Figur eindeutig, indem wir bestimmen, daß sie in P_1 gerade diesen kleinen Wert haben soll; dann ist λ_1 kleiner als $2t_1$. Der Wert λ_0 derselben Funktion in P_0 ist einer der Werte von

$\log(s_0)$, also, dem ersteren Logarithmensatz zufolge, größer als t_0 oder als $\frac{t_0}{s_0}$. Beides ist größer als $\frac{1}{\varkappa}$, aber auch größer als $\frac{t_0}{\varkappa}$, da 1 und $\frac{1}{s_0}$ größer als $\frac{1}{\varkappa}$ sind. Demnach ist λ_0 größer als $\frac{t_0}{\varkappa}$, während λ_1 kleiner als $2t_1$ ist. Der Quotient $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ ist daher kleiner als $2\varkappa\frac{t_1}{t_0}$, um so mehr kleiner als $B\frac{t_1}{t_0}$, und $\frac{t_0}{t_1}$ kleiner als $B\frac{\lambda_0}{\lambda_1}$.

λ ist offenbar mit $\lambda_0 + u$, $\frac{\lambda}{\lambda_0}$ mit $1 + \frac{u}{\lambda_0}$ identisch. λ_0 ist größer als $\frac{1}{\varkappa}$, u bleibt auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ kleiner als A. Folglich ist $\frac{\lambda}{\lambda_0}$ auf dieser Linie kleiner als $1 + \varkappa A$. $\varkappa$ und A, also auch $\varkappa A$, sind größer als 1, daher $1 + \varkappa A$ kleiner als $2\varkappa A = B$. $\lambda = \log(s)$ kann in der Figur nicht verschwinden, da s nicht gleich 1 wird; wir haben in $\frac{\lambda}{\lambda_0}$ eine reguläre Funktion, die in der Figur nicht 0, in P_0 aber gleich 1 wird und die auf dem Rande kleiner als B bleibt. Nach der Folgerung aus dem zweiten Logarithmensatz muß ihr reziproker Wert in P_1 kleiner als B^{2n-2} sein. Es ist daher $\frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ kleiner als B^{2n-2}, und da $\frac{t_0}{t_1}$ kleiner als $B\frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ ist, so ist $\frac{t_0}{t_1}$ kleiner als B^{2n-1}, um so mehr kleiner als B^{2n}.

Damit ist vollständig bewiesen, daß die Funktion $f = \frac{t_0}{t}$ in P_1 kleiner als B^{2n} ist. Das gilt für alle Punkte der Kreisfläche, die in der Entfernung d vom Rande liegen. In der Entfernung $\frac{1}{2}d$ ist f wenigstens kleiner als B^{4n}, denn, wenn man d durch $\frac{1}{2}d$ ersetzt, verdoppelt sich n. Auf dem zu $\mathfrak{K}$ konzentrischen Kreise $\mathfrak{K}'$, dessen Radius $r - \frac{1}{2}d$ ist, ist also f kleiner als B^{4n}. Das Verhältnis dieses kleineren Radius zum Abstand des Punktes P_1 von $\mathfrak{K}'$ ist $2n-1$, denn der Abstand ist $\frac{1}{2}d$. Die in P_0 verschwindende Funktion $\log(f) = \log\left(\frac{t_0}{t}\right)$ ist mit $-v$ identisch. Auf die Funktion f, die in der Kreisfläche $\mathfrak{K}'$ weder 0 noch ∞ wird, die in P_0 gleich 1 ist und auf $\mathfrak{K}'$ kleiner als B^{4n} ist, wenden wir

den zweiten Logarithmensatz an. Dann ergibt sich, daß v im Punkte P_1 kleiner als $(2\nu - 2)\log B^{4n}$ ist. ν ist hier: $2n-1$; $2\nu - 2 = 4\,(n-1)$, also kleiner als $4n$; folglich ist v in P_1 kleiner als $2^4 n^2 \log(B)$. Von u gilt dasselbe; denn alle Voraussetzungen, die wir gemacht haben, bleiben bestehen, wenn wir s mit t vertauschen. Wir haben das Resultat: Wenn u und v auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ kleiner bleiben als eine positive Zahl A, die größer als 1 ist, so sind beide Größen innerhalb der Kreisfläche, im Abstande d vom Rande, kleiner als $2^4 n^2 \log(2\varkappa A)$; n ist das Verhältnis $\frac{r}{d}$.

Das muß auch für den kleineren Kreis $\mathfrak{K}'$ gelten. Wir nehmen an, daß u und v auf dem Kreise $\mathfrak{K}'$, also in den Punkten, die in der Entfernung $\frac{1}{2}d$ von $\mathfrak{K}$ liegen, kleiner sind als eine positive Zahl $\mathfrak{A}$, die größer als 1 ist. Im Punkte P_1, der die Entfernung d von $\mathfrak{K}$, $\frac{1}{2}d$ von $\mathfrak{K}'$ hat, sind dann u und v kleiner als $2^4\,(2n-1)^2 \log\,(2\varkappa\mathfrak{A})$; denn wenn man $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{K}'$ ersetzt, den Punkt P_1 aber ungeändert läßt, tritt $2n-1$ an die Stelle von n. u und v sind daher in der Entfernung d vom Kreise $\mathfrak{K}$ kleiner als $\mathfrak{B} = 2^6 n^2 \log(2\varkappa\mathfrak{A})$, wenn sie in der Entfernung $\frac{1}{2}d$ kleiner als $\mathfrak{A}$ sind. Dabei bedeutet $\mathfrak{A}$ eine beliebige positive Zahl, die größer als 1 ist.

Die Funktion $\varphi(d)$ ist so gewählt, daß $\mathfrak{B}$ kleiner als $\varphi(d)$ wird, wenn $\mathfrak{A} = \varphi(\frac{1}{2}\,\mathrm{d})$ gesetzt wird. — Daß dies zutrifft, ist leicht zu sehen. $\varphi(d)$ ist $2^{12}\varkappa n^3$, $\varphi(\frac{1}{2}d) = 2^{15}\varkappa n^3$; für $\mathfrak{A} = \varphi(\frac{1}{2}d)$ ist daher $2\varkappa\mathfrak{A}$ kleiner als die vierte Potenz von $2^4\varkappa n$ und $\log(2\varkappa\mathfrak{A})$ kleiner als $4\log(2^4\varkappa n)$, um so mehr kleiner als $4\cdot 2^4\varkappa n$. Daraus folgt, daß $2^6 n^2 \log\,(2\varkappa\mathfrak{A})$ kleiner als $2^{12}\varkappa n^3$ ist, also $\mathfrak{B}$ kleiner als $\varphi(d)$. Jetzt können wir sagen: u und v sind im Abstande d vom Kreise $\mathfrak{K}$ kleiner als $\varphi(d)$, wenn sie im Abstand $\frac{1}{2}d$ kleiner sind als $\varphi(\frac{1}{2}d)$. Das trifft wieder zu, wenn sie im Abstand $\frac{1}{4}d$ kleiner als $\varphi(\frac{1}{4}d)$ sind; usw. Demnach sind u und v im Abstand d kleiner als $\varphi(d)$, wenn sie im Abstand $\delta = \frac{d}{2^m}$ — bei beliebig hohem m — kleiner sind als $\varphi(\delta)$. Wir nehmen m so groß an, daß $\varphi(\delta)$ größer ist als A. Dann sind u und v in allen Punkten, die innerhalb $\mathfrak{K}$ liegen, kleiner als $\varphi(\delta)$, also auch in denen, die die Entfernung δ vom Rande haben. Die Bedingung ist dann sicher erfüllt; wir sagen einfach: u und v sind im Abstand d vom Rande kleiner als $\varphi(d)$. Damit ist bewiesen, daß Δ kleiner als D ist.

Eine Ergänzung ist notwendig. Vorausgesetzt war die Regularität der Funktion s und ihre Wertverschiedenheit von 0 und 1 nicht nur für das Innere, sondern auch für den Rand der Kreisfläche. In bezug auf den Rand lassen wir jetzt die Voraussetzungen fallen. Wir nehmen eine positive Größe d' an, die kleiner als d ist, ein r', das um ebensoviel kleiner als r ist; dann gilt für den konzentrischen Kreis mit dem Radius r' der Satz ohne weiteres; es ist daher Δ kleiner als $K(n')^8$, wo $n' = \frac{r'}{d'}$ ist, also kleiner als $\frac{r}{d'}$. Hieraus folgt, daß Δ kleiner als $\varphi(d')$ ist, wie nahe man auch d' an d annehmen mag. Dann kann Δ nicht größer als $\varphi(d)$ sein; wir sagen ruhig, daß es kleiner ist als $\varphi(d)$.

Wir sprechen den Satz etwas freier aus, indem wir statt 0,1 irgend zwei Werte nehmen:

Es sei z eine Funktion von x, regulär *im Innern* eines Kreises, und es seien zwei Werte α, β bekannt, die z in diesem Gebiet nirgends annimmt, außerdem ein positives $\varkappa$, das größer ist als die Verhältnisse von $z-\alpha$, $z-\beta$, $\alpha-\beta$ im Mittelpunkte. Dann sind die stetigen Änderungen, die die Logarithmen von $z-\alpha, z-\beta$ auf der geraden Linie erfahren, die von der Mitte zu einem andern innern Punkte führt, kleiner als $K n^3$. Dabei ist $K = 2^{12}\varkappa$, n das Verhältnis, in dem der Radius zum Abstand des andern Punktes vom Rande steht.

Ist $\alpha = 0$, $\beta = 1$, so ist z die Funktion s; der Fall, wo α, β andere Werte haben, wird auf diesen zurückgeführt, indem man $z = \alpha + (\beta - \alpha)\, s$ setzt.

§ 3.

Eigenschaften einer Funktion, die in O einen fraglichen Punkt hat, sonst aber in der Umgebung von O als eindeutige reguläre definiert ist und in dieser Umgebung zwei Werte nicht annimmt.

Die Umgebung von O denken wir uns durch eine Linie λ abgegrenzt, die den Punkt O umschließt. z sei eine Funktion von x, noch nicht definiert für den Punkt O, im übrigen in der Umgebung von O eindeutig-regulär und von α sowie von β verschieden, so daß weder $z-\alpha$, noch $z-\beta$ gleich 0 werden kann. Die Logarithmen von $z-\alpha, z-\beta$ sind zwar ebenfalls regulär in der Umgebung von O, aber nicht notwendig eindeutig. Wir nehmen an, daß $\log(z-\alpha)$ sich um $2h\pi i$ ändert, wenn der variable

Punkt den fraglichen O einmal im positiven Sinn umkreist. h ist eine ganze Zahl; den einfacheren Fall, wo $h = 0$ ist, lassen wir vorläufig beiseite.

Eine Funktion ζ, die dieselben Eigenschaften hat wie z, für die aber der Punkt O kein problematischer ist, läßt sich in folgender Weise bilden. a sei der Wert von x in O, C eine Konstante, größer als die größte Entfernung der Linie λ von O, so daß $x - a$ innerhalb λ kleiner als C bleibt. Stellen wir dann die Gleichung auf

$$\zeta = \alpha + (\beta - \alpha)\left(\frac{x-a}{C}\right)^h,$$

so kann ζ innerhalb λ, abgesehen von O, weder gleich α, noch gleich β, noch ∞ werden. Außerdem ändert sich $\log(\zeta - \alpha)$ bei der Umkreisung des Punktes O um dieselbe Größe $2h\pi i$, wie $\log(z - \alpha)$. Es ist daher

$$\log(z - \alpha) - \log(\zeta - \alpha) = w$$

eine in der Umgebung von O eindeutige Funktion von x.

Um O beschreiben wir einen Kreis mit so kleinem Radius r, daß auch alle Punkte, deren Entfernung von O kleiner oder gleich $2r$ ist, innerhalb λ liegen, und wir führen eine große positive Konstante N ein, die sich auf den Kreis bezieht. Zunächst werde ein positives $\varkappa$ bestimmt, größer als alle Werte, die die Verhältnisse von $z - \alpha$, $z - \beta$, $\alpha - \beta$ auf dem Kreise annehmen; ebenso ein λ, größer als die Verhältnisse von $\zeta - \alpha$, $\zeta - \beta$, $\alpha - \beta$ auf dem Kreise, ein positives M, größer als alle Werte von w auf derselben Linie, und es werde $K = 2^{12}\varkappa$, $L = 2^{12}\lambda$, $N = K + L + M$ gesetzt.

Nun nehmen wir einen Punkt P_1 an, im Innern des Kreises, in der Entfernung d von O. P_0 sei derjenige Punkt der Peripherie, der P_1 am nächsten liegt. Um P_0 beschreiben wir einen zweiten Kreis mit demselben Radius r. Auch dieser zweite Kreis liegt unserer Voraussetzung nach ganz innerhalb λ; er geht durch O hindurch; in seinem Innern sind z und ζ reguläre Funktionen, die weder gleich α noch gleich β werden. Er umschließt den Punkt P_1, und P_1 liegt in der Entfernung d von seinem Rande. Im Mittelpunkt P_0 ist — da P_0 auf dem ersten Kreise liegt — w kleiner als M, die Verhältnisse von $z - \alpha$, $z - \beta$, $\alpha - \beta$ kleiner als $\varkappa$, die von $\zeta - \alpha$, $\zeta - \beta$, $\alpha - \beta$ kleiner als λ. Indem wir den Satz des vorigen Paragraphen anwenden, finden wir, daß die stetige Änderung von $\log(z - \alpha)$ auf der geraden Linie P_0P_1 kleiner als Kn^3, die von $\log(\zeta - \alpha)$

kleiner als Ln^3 ist — wobei $n = \frac{r}{d}$ ist —; die von w ist daher kleiner als $(K+L)n^3$. Die Änderung der eindeutigen Funktion w ist: $w_1 - w_0$, wobei w_1 und w_0 die Werte von w in P_1 und P_0 bedeuten. w_0 aber ist kleiner als M, um so mehr kleiner als Mn^3; daher ist w_1 kleiner als Nn^3.

Nun ist $n = \frac{r}{d}$, und d nichts anderes als der absolute Wert von $x_1 - a$. Da P_1 ein ganz beliebiger von O verschiedener Punkt im Innern des ersten Kreises ist, so ergibt sich, daß die Funktion w im ersten Kreise ihrem absoluten Werte nach durchweg kleiner ist als die rationale $N\left(\frac{r}{x-a}\right)^3$. Das Produkt $\left(\frac{x-a}{r}\right)^3 w$ bleibt deshalb im ersten Kreise kleiner als N, und wenn man dieses Produkt noch mit $x-a$ multipliziert, so erhält man eine Funktion, von der man sagen kann, trotz des großen Faktors N, daß sie gleichzeitig mit $x-a$ unendlich klein wird.

Daraus folgt, daß das Produkt $(x-a)^3 w$ bei der Annäherung von x an a sich einem bestimmten endlichen Werte nähert, und daß, wenn man dem Produkt für $x=a$ diesen Wert beilegt, $(x-a)^3 w$ eine innerhalb λ, auch im Punkte O, vollständig definierte eindeutige reguläre Funktion ist. Die Größe w selbst kann dadurch für $x=a$ den Wert ∞ erhalten, aber sie verhält sich dort wie eine rationale Funktion und wird höchstens von der dritten Ordnung unendlich.

Von w kann man leicht zu z übergehen. $\log(z-\alpha)$ ist gleich $\log(\zeta-\alpha)+w$; der Differentialquotient von $\log(\zeta-\alpha)$ nach x ist $\frac{h}{x-a}$. Es verhält sich also die Ableitung von $\log(z-\alpha)$ nach x im Punkte O wie eine rationale Funktion. Dasselbe gilt von $\frac{d}{dx}\log(z-\beta)$, also auch von dem Quotienten beider Ableitungen, der gleich $\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ ist; folglich verhält sich auch z in O wie eine rationale Funktion; das Problem, das der Punkt O darbietet, ist gelöst.

Wir hatten die ganze Zahl h von 0 verschieden angenommen. Ist $h=0$, so wird die Betrachtung einfacher. Man braucht dann keine Hilfsfunktion ζ, weil schon $\log(z-\alpha)$ eindeutig ist.

Die unmittelbare Folgerung aus dem bewiesenen Satz ist das

*Picard*sche Theorem. Wenn man annimmt, daß der Punkt O für die Funktion z ein wesentlich singulärer sei, so ist es möglich, daß z innerhalb λ einen Wert α nicht annimmt. Jeder andere, β, muß aber innerhalb λ, sogar in jedem Kreise um O, also in unendlich vielen Punkten angenommen werden. Allerdings: wie nahe man an O herangehen muß, um eine Stelle zu finden, wo $z = \beta$ wird, das ist eine andere Frage; aus dem großen Faktor N läßt sich schließen, daß es sich um Punkte in unmeßbar kleiner Entfernung von O handelt.

Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnis.

Der von Herrn Hofrat Dr. *Alfred Ackermann-Teubner* in Leipzig im Jahre 1912 bei der Universität Leipzig errichtete „Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen Wissenschaften“ ist in diesem Jahre durch das Preisgericht Herrn Professor Dr. *Ernst Zermelo* in Zürich für die Arbeiten über Mengenlehre in den Mathematischen Annalen Bd. 59 und 65, insbesondere für die Arbeit in Bd. 65: „Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung“ aus dem Jahre 1907 zuerkannt worden.

Die Klassenzahl zyklischer Körper vom Primzahlgrad, deren Diskriminante nur eine Primzahl enthält.

Von Herrn *Rudolf Fueter* in Zürich.

Einleitung.

Die Briefe von *Kummer* an *Kronecker*, deren Herausgabe wir *Hensel* verdanken*), sind für jeden Zahlentheoretiker ganz außergewöhnlich interessant. Am 9. Februar 1842 teilt *Kummer* seinem Freunde einen Satz mit**), der sich auf *Fourier*sche Reihen bezieht. Diesen Satz hat *Kummer* später in seiner Arbeit: „De residuis cubicis disquisitiones nonnullae analyticae“ (dieses Journal, Bd. 32 (1846), S. 349) veröffentlicht und zur rechnerischen Bestimmung gewisser *Lagrange*scher Resolventen benutzt***). Spricht man den Satz statt für 3 für eine beliebige ungerade Primzahl aus, so kann mit seiner Hilfe in überraschend einfacher Weise die Klassenzahl solcher zyklischer Körper vom Primzahlgrad l berechnet werden, deren Diskriminante nur die von l verschiedene Primzahl p enthält. Die klassische *Dirichlet*sche Methode der Berechnung von Klassenzahlen spezieller Körper bestand in der stets etwas künstlich anmutenden Einführung bestimmter Integrale. Es ist bemerkenswert, daß bei der hier durch-

*) Festschrift zur Feier des 100. Geburtstages *Eduard Kummer*s. Teubner, Leipzig und Berlin, 1910.

**) S. 49.

***) Es ist ungemein zu bedauern, daß die *Berliner Akademie* immer noch nicht die *Werke Kummer*s herausgegeben hat. *Kummer*s Arbeiten sind glänzend geschrieben und verdienten viel mehr gelesen zu werden. Sie enthalten noch viele ungehobene Schätze, wie vielleicht im folgenden gezeigt wird.

geführten Berechnung an deren Stelle die Summe der einfachen *Fourier*-schen Reihe

$$-\lg 2 \sin \frac{x}{2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos mx}{m}$$

tritt, und zwar in folgerichtiger Notwendigkeit.

Das Resultat ist einfach und elegant. Die Klassenzahl h wird das Verhältnis zweier Determinanten:

$$h = \frac{\Delta}{R};$$

R ist der Regulator, Δ die entsprechende Determinante der Logarithmen der Relativnormen von Kreiseinheiten in bezug auf den gegebenen zyklischen Körper. Der Ausdruck entspricht dem zweiten Faktor der Klassenzahl des Körpers der p-ten Einheitswurzel und stimmt mit ihm genau überein, wenn zwischen dem Grad l des zyklischen Körpers und der in seiner Diskriminante enthaltenen Primpahl p die Beziehung besteht

$$p = 2l + 1.$$

Für $l = 2$, $p \equiv 1 \pmod 4$ ist der Ausdruck die bekannte Formel für die Klassenzahl des quadratischen Körpers $k(\sqrt{p})$. Der Fall $l = 2$, $p \equiv 3 \pmod 4$ ergibt die einzigen zyklischen Körper (von der Art, wie sie hier betrachtet werden), die imaginär sind. Die Klassenzahl ist dann nicht in dem angegebenen Ausdruck enthalten, und dieser Fall wird im folgenden nicht inbegriffen sein.

Das oben angegebene Resultat ist enthalten in der Formel (39.), die *Kummer* in seiner grundlegenden Arbeit, dieses Journal, Bd. 40 (1850), S. 111, angegeben hat*). *Fuchs* hat in diesem Journal Bd. 65 (1866)**) ganz allgemein die Klassenzahl aller Unterkörper der Kreiskörper berechnet. Die oben angegebene Formel ist deshalb auch ein Spezialfall seiner auf S. 106 angegebenen Formel (11.). Wegen der angewandten Methode scheint mir die folgende Entwicklung trotzdem Interesse zu verdienen.

Die zwei ersten Paragraphen bringen das Notwendigste der Zahlentheorie des gegebenen zyklischen Körpers, die Einführung des Restcharakters und das Zerlegungsgesetz der Primzahlen. Der dritte Paragraph be-

---

*) „Bestimmung der Anzahl nicht aequivalenter Classen für die aus λ-ten Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen und die idealen Factoren derselben."

**) „Ueber die aus Einheitswurzeln gebildeten komplexen Zahlen von periodischem Verhalten, insbesondere die Bestimmung der Klassenzahl derselben."

rechnet den Grenzwert der ζ-Funktion durch unendliche Reihen. Im vierten Paragraphen wird der *Kummer*sche Hilfssatz aufgestellt und bewiesen, und in den beiden letzten Paragraphen werden die im dritten erhaltenen unendlichen Reihen mit dessen Hilfe summiert und die Klassenzahl berechnet.

§ 1. Grundbegriffe.

Die Klassenzahl h eines algebraischen Körpers k ist durch die *Dedekind*sche Grenzformel dargestellt*)

$$\varkappa h = \lim_{s=1} (s-1)\,\zeta_k(s). \tag{1.}$$

Dabei ist $\zeta_k(s)$ das unendliche, über die Normen $n(\mathfrak{q})$ aller Primideale $\mathfrak{q}$ von k erstreckte Produkt:

$$\zeta_k(s) = \prod_{(\mathfrak{q})} \frac{1}{1-\frac{1}{n(\mathfrak{q})^s}}; \tag{2.}$$

die Konstante $\varkappa$ hat den Wert:

$$\varkappa = \frac{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}}{w}\frac{R}{|\sqrt{d}|},$$

wo R der Regulator, d die Diskriminante, w die Anzahl der Einheitswurzeln, r_1 die Anzahl der reellen, r_2 der imaginären unter den konjugierten Körpern von k ist. *Das Problem besteht darin, den in* (1.) *auftretenden Grenzwert für die im Titel charakterisierten Körper zu berechnen. Dabei soll noch der Grad l von dem Diskriminantenteiler p verschieden und, um Unterfälle zu vermeiden, l als ungerade vorausgesetzt werden.*

Alle zu betrachtenden Körper erhält man algebraisch in folgender Weise: Es seien l und p zwei ungerade Primzahlen, für die

$$p \equiv 1 \pmod{l}. \tag{3.}$$

Der Körper K der p-ten Einheitswurzel ist durch $Z = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ gegeben. K besitzt wegen (3.) einen zyklischen Unterkörper k vom Grade l und der Diskriminante

$$d = p^{l-1}.$$

Diese enthält somit nur den einen Teiler p. Für k ist $r_1 = l_1$, $r_2 = 0$, $w = 2$ (da l ungerade ist); also:

---

*) *David Hilbert:* Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinig. Bd. IV. Berlin, Georg Reimer, 1897 („Zahlbericht") S. 230.

$$(4.) \qquad \varkappa = \frac{2^{l-1}}{p^{\frac{l-1}{2}}} R.$$

Nach einem *Kronecker*schen Satze*) ist jeder zyklische Körper vom Primzahlgrade l und nur einem Diskriminantenteiler $p \neq l$ mit diesem Unterkörper k des Körpers der p-ten Einheitswurzeln identisch.

§ 2. Der Zerlegungssatz.

Aus dem allgemeinen Zerlegungssatz der Primzahlen q im Körper K der p-ten Einheitswurzeln kann leicht die Zerlegung von q im Unterkörper k gefolgert werden. Es sei R eine bestimmte Primitivzahl (mod p). Dann gilt für jede zu p teilerfremde natürliche Zahl n die Kongruenz

$$n \equiv R^{\operatorname{ind} n} \pmod{p}; \qquad 0 \leqq \operatorname{ind} n < p-1.$$

Es bedeute $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{l}}$ die l-te Einheitswurzel. Man ordnet dann jeder Zahl n den *l-ten Restcharakter* $\left(\frac{n}{p}\right)_l$ zu:

$$\left(\frac{n}{p}\right)_l = \zeta^{\operatorname{ind} n}, \text{ wenn } n \not\equiv 0 \pmod{p};$$

$$\left(\frac{n}{p}\right)_l = 0 \quad , \text{wenn } n \equiv 0 \pmod{p}.$$

Alle Zahlen n, für die $\left(\frac{k}{p}\right)_l = 1$ ist, sind l-te Potenzreste (mod p); denn für sie muß

$$\operatorname{ind} n \equiv 0 \pmod{l}$$

sein, somit nach *Fermat*:

$$n^{\frac{p-1}{l}} \equiv R^{\frac{p-1}{l} \operatorname{ind} n} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Alle Zahlen, die (mod p) kongruent sind, haben gleichen Restcharakter: $n \equiv m \pmod{p}$: $\left(\frac{n}{p}\right)_l = \left(\frac{m}{p}\right)_l$.

Außerdem gilt die Formel:

$$\left(\frac{n}{p}\right)_l \left(\frac{m}{p}\right)_l = \left(\frac{n\,m}{p}\right)_l.$$

Jetzt kann der Zerlegungssatz so ausgesprochen werden:

Zerlegungssatz: Eine von p verschiedene Primzahl q zerfällt in k in l von einander verschiedene Primideale oder bleibt selbst Primideal, je nachdem $\left(\frac{q}{p}\right)_l = 1$ *oder* $\neq 1$ *ist. p wird in k die l-te Potenz eines Primideals* $\mathfrak{p}$.

*) „Zahlbericht“ S. 339.

§ 3. Die ζ_k-Funktion.

Aus dem Zerlegungssatz folgt, daß die Norm eines Primideals $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ gleich q oder q^l ist, je nachdem $\left(\frac{q}{p}\right)_l = 1$ oder $\neq 1$ ist. Wir greifen in (2.) alle diejenigen Faktoren des unendlichen Produktes heraus, die sich auf einen Primteiler von q erstrecken. Ist $\left(\frac{q}{p}\right)_l = 1$, so gibt es l Faktoren, deren Produkt gleich

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{q^s}\right)^l}$$

ist. Wenn dagegen $\left(\frac{q}{p}\right)_l \neq 1$ ist, so gibt es nur einen Faktor

$$\frac{1}{1-\frac{1}{q^{sl}}}.$$

Mit Hilfe des Restcharakters und der elementaren Formel:

$$(x-y)(x-\zeta y)(x-\zeta^2 y)\cdots(x-\zeta^{l-1} y) = x^l - y^l$$

(x, y beliebige Größen) gelingt es, in *beiden* Fällen, $\left(\frac{q}{p}\right)_l = 1$ und $\neq 1$, den zu q gehörigen Faktor von (2.) in *einer* Formel zu schreiben:

$$\prod_{n=0}^{l-1} \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)_l^n \frac{1}{q^s}}, \quad q \neq p.$$

Für $q = p$ geht in p nur das Primideal $\mathfrak{p}$ auf und wegen $n(\mathfrak{p}) = p$ ist

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

der entsprechende Faktor in (2.).

Berücksichtigt man diese Resultate, so stellt sich jetzt (2.) so dar:

$$\zeta_k(s) = \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \cdot \prod_{(q \neq p)} \prod_{n=0}^{l-1} \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)_l^n \frac{1}{q^s}}.$$

Man vertauscht die Reihenfolge der Produkte rechts, was erlaubt ist, und schreibt das Produkt für $n = 0$ besonders:

$$\zeta_k(s) = \prod_{(q)} \frac{1}{1-\frac{1}{q^s}} \cdot \prod_{n=1(q \neq p)}^{l-1} \prod \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)_l^n \frac{1}{q^s}}.$$

Das erste Produkt ist über alle q erstreckt, stimmt daher mit

$$\zeta(s) = \prod_{(q)} \frac{1}{1-\frac{1}{q^s}} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

überein. Das innere Produkt des zweiten Faktors sei mit $\Pi_n(s)$ abgekürzt:

$$\Pi_n(s) = \prod_{(q \neq p)} \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)_l^n \frac{1}{q^s}}.$$

Dann ist:

$$\zeta_k(s) = \zeta(s)\, \Pi_1(s)\, \Pi_2(s) \ldots \Pi_{l-1}(s).$$

Jetzt kann der Grenzwert durchgeführt werden:

$$\lim_{s=1} (s-1)\, \zeta_k(s) = \lim_{s=1} (s-1)\, \zeta(s) \cdot \Pi_1(s) \Pi_2(s) \ldots \Pi_{l-1}(s)$$
$$= \Pi_1(1) \Pi_2(1) \ldots \Pi_{l-1}(1).$$

Der Wert 1 des Argumentes s kann fortgelassen werden:

(5.) $$\lim_{s=1} (s-1)\, \zeta_k(s) = \Pi_1\, \Pi_2 \ldots \Pi_{l-1},$$ wo

$$\Pi_n = \prod_{(q \neq p)} \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)_l^n \frac{1}{q}}.$$

Man kann Π_n in eine unendliche Reihe entwickeln. Wegen $\left(\frac{n}{p}\right)_l \left(\frac{m}{p}\right)_l = \left(\frac{nm}{p}\right)_l$ und $\left(\frac{m}{p}\right)_l = 0$, wenn $m \equiv 0 \pmod{p}$ ist, wird:

(6.) $$\Pi_n = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{p}\right)_l^n \frac{1}{m}.$$

Damit ist das Problem noch nicht gelöst, sondern nur auf das weitere zurückgeführt, die unendliche Summe Π_n zu berechnen.

§ 4. Der *Kummer*sche Hilfssatz.

Kummer hat für $l = 3$ den folgenden Satz ausgesprochen:

Hilfssatz: *Ist*

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx \qquad (0 < x < 2\pi)$$

eine unbedingt konvergente Fouriersche Reihe, so ist für jedes $n = 1, 2 \ldots l-1$:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right)_l^n f\left(\frac{2\pi k}{p}\right) = \Lambda_n \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\frac{m}{p}\right)_l^{l-n},$$

wo:

$$\Lambda_n = \sum_{\nu=0}^{p-2} \zeta^{\nu n} Z^{R^\nu}, \qquad n = 1, 2, \ldots l-1,$$

die Lagrangesche Resolvente, und p und l ungerade Primzahlen sind, für die $p \equiv 1 \pmod{l}$ erfüllt ist ($Z = e^{\frac{2\pi i}{p}}$, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{l}}$, R Primitivzahl $(\mathrm{mod}\, p)$).

Beweis: Für alle $k = 1, 2, \ldots p-1$ ist

$$f\left(\frac{2\pi k}{p}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{2km\pi}{p},$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right)_l^n f\left(\frac{2\pi k}{p}\right) = \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{k}{p}\right)_l^n a_m \cos \frac{2km\pi}{p}, \qquad n = 1, 2, \ldots l-1.$$

Wegen der unbedingten Konvergenz darf man die beiden Summen rechts vertauschen:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right)_l^n f\left(\frac{2\pi k}{p}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right)_l^n \cos \frac{2\pi km}{p}.$$

Zunächst fallen hier alle inneren Summen fort, für die $m \equiv 0 \pmod{p}$ ist. Denn für diese m ist $\cos \frac{2\pi km}{p} = 1$; da es unter den Zahlen $1, 2, \ldots p-1$ je $\frac{p-1}{l}$ Zahlen mit demselben Restcharakter gibt, so ist

$$(7.) \quad \sum_{m=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right)_l^n = \frac{p-1}{l}\left(1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{l-1}\right) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots l-1.$$

Für $m \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist dagegen $\left(\frac{m}{p}\right)_l^l = 1$; somit darf geschrieben werden:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right)_l^n f\left(\frac{2\pi k}{p}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{m}{p}\right)_l^l \left(\frac{k}{p}\right)_l^n \cos \frac{2\pi km}{p}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\frac{m}{p}\right)_l^{l-n} \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{mk}{p}\right)_l^n \cos \frac{2\pi mk}{p}.$$

Setzt man in der inneren Summe für km den kleinsten positiven Wert $(\mathrm{mod}\, p)$, so ändert sie sich nicht. Die Summe ist daher von m unabhängig, wenn $m \not\equiv 0 \pmod{p}$. Der Fall $m \equiv 0 \pmod{p}$ braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden, da dann schon der vor der Summe stehende Faktor Null ist. Somit ist:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right)_l^n f\left(\frac{2\pi k}{p}\right) = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right)_l^n \cos \frac{2\pi k}{p} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\frac{m}{p}\right)_l^{l-n}.$$

Jetzt hat man nur noch

$$\cos \frac{2\pi k}{p} = \frac{Z^k + Z^{-k}}{2}$$

zu setzen und zu bedenken, daß wegen $\left(\frac{-1}{p}\right)_l = 1$:

$$(8.) \qquad \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right)_l^n Z^k = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right)_l^n Z^{-k}, \qquad n = 1, 2, \ldots l-1.$$

Dann folgt:

$$\Lambda_n = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right)_l^n \cos\frac{2\pi k}{p} = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right)_l^n Z^k = \sum_{\nu=0}^{p-2} \zeta^{\nu n} Z^{R^\nu},$$

wobei ν der Index von k bezüglich der Basis $R \pmod p$ ist. Setzt man dies oben ein, so entsteht die Formel des Hilfssatzes.

§ 5. Berechnung von Π_n.

Wählt man im *Kummer*schen Hilfssatze speziell

$$a_m = \frac{1}{m^s},$$

wo s eine reelle, positive Variable > 1 ist, so konvergiert die Reihe

$$f_s(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos mx}{m^s}, \qquad (0 < x < 2\pi)$$

unbedingt und als Funktion von s für $s > 1$ gleichmäßig. In der Grenze $s = 1$ geht sie in die Formel über

$$-\lg 2 \sin\frac{x}{2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos mx}{m} \qquad (0 < x < 2\pi).$$

Für $s = 1$ wird auch

$$\lim_{s=1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \left(\frac{m}{p}\right)_l^{l-n} = \Pi_{l-n}, \qquad n = 1, 2, \ldots l-1$$

eine konvergente Reihe. Die Formel des Hilfssatzes ergibt somit in der Grenze $s = 1$:

$$(9.) \quad -\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right)_l^n \lg 2 \sin\frac{\pi k}{p} = \Lambda_n \cdot \Pi_{l-n}, \qquad n = 1, 2, \ldots l-1.$$

Dadurch ist Π_{l-n} durch einen geschlossenen Ausdruck berechnet. Derselbe kann noch einfacher geschrieben werden. Wegen $Z^p = 1$ ist:

$$2 \sin\frac{\pi k}{p} = \frac{Z^{\frac{k}{2}} - Z^{-\frac{k}{2}}}{\sqrt{-1}} = \frac{Z^{-\frac{k}{2}}}{\sqrt{-1}} (Z^k - 1),$$

$$2 \sin\frac{\pi(p-k)}{p} = \frac{Z^{\frac{p-k}{2}} - Z^{-\frac{p-k}{2}}}{\sqrt{-1}} = \frac{Z^{-\frac{p-k}{2}}}{\sqrt{-1}} (Z^{-k} - 1).$$

Wegen $\left(\frac{p-k}{p}\right)_l^n = \left(\frac{-k}{p}\right)_l^n = \left(\frac{k}{p}\right)_l^n$ haben die Logarithmen dieser beiden Zahlen in (9.) denselben Faktor. In der Summe tritt also:

$$\left(\frac{k}{p}\right)_l^n \lg 4 \sin\frac{\pi k}{p} \sin\frac{\pi(p-k)}{p} = \left(\frac{k}{p}\right)_l^n \lg (Z^k - 1)(Z^{-k} - 1)$$

auf, weil $-Z^{\frac{p}{2}} = -e^{\frac{p}{2}\frac{2\pi i}{p}} = +1$ ist.

Somit lautet Formel (9.):

$$-\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(p-1)}\left(\frac{k}{p}\right)_l^n \lg (Z^k-1)(Z^{-k}-1) = \Lambda_n \Pi_{l-n}, \qquad n=1,2,\dots l-1.$$

Links sollen alle Summanden zusammengefaßt werden, die mit demselben Restcharakter multipliziert sind. Zunächst erkennt man, daß k durch eine beliebige andere (mod p) kongruente Zahl ersetzt werden darf, und daß man k mit $-k$ vertauschen darf. Statt über k von 1 bis $\frac{p-1}{2}$ darf deshalb über R^ν von $\nu=0$ bis $\nu=\frac{p-3}{2}$ summiert werden. Wegen $\left(\frac{R^\nu}{p}\right)_l^n = \zeta^{\nu n}$ wird dann:

$$-\sum_{\nu=0}^{\frac{1}{2}(p-3)} \zeta^{\nu n} \lg (Z^{R^\nu}-1)(Z^{-R^\nu}-1) = \Lambda_n \Pi_{l-n}; \qquad n=1,2,\dots l-1.$$

Für alle (mod l) kongruenten ν haben die Logarithmen gleichen Faktor. Setzt man

$$\lambda_r = \prod_{u=0}^{\frac{p-1}{2l}-1} (Z^{R^{r+ul}}-1)(Z^{-R^{r+ul}}-1), \qquad r=0,1,2,\dots l-1,$$

so ist λ_r die Relativnorm von $(Z^{R^r}-1)(Z^{-R^r}-1)$ in bezug auf k, also eine Zahl von k. Es wird

$$\text{I.} \qquad -\sum_{r=0}^{l-1} \zeta^m \lg \lambda_r = \Lambda_n \Pi_{l-n}, \qquad n=1,2,\dots l-1.$$

§ 6. Berechnung von h.

Zur Berechnung von h muß man sich noch des Satzes bedienen, daß der absolute Betrag von Λ_n gleich $\left|\sqrt{p}\right|$ ist*):

$$|\Lambda_n| = \left|\sqrt{p}\right|, \qquad n=1,2,\dots l-1.$$

Nun folgt aus (1.), (4.) und (5.):

$$\frac{2^{l-1}}{p^{\frac{l-1}{2}}} R h = \lim_{s=1} (s-1)\zeta_k(s) = \Pi_1 \Pi_2 \cdots \Pi_{l-1}.$$

Setzt man hier den Wert aus I. ein, so wird:

$$\frac{2^{l-1}}{p^{\frac{l-1}{2}}} Rh = \frac{\prod_{n=1}^{l-1}\sum_{r=0}^{l-1} \zeta^{rn} \lg \lambda_r}{\Lambda_1 \Lambda_2 \cdots \Lambda_{l-1}}.$$

Die linke Seite und der Zähler rechts sind reell. Also ist es auch der Nenner rechts:

*) „Zahlbericht“ S. 362.

$$\Lambda_1 \Lambda_2 \cdots \Lambda_{l+1} = (\sqrt{p})^{l-1} = p^{\frac{l-1}{2}},$$

und es ergibt sich

$$h = \frac{\frac{1}{2^{l-1}} \prod_{n=1}^{l-1} \sum_{r=0}^{l-1} \zeta^{rn} \lg \lambda_r}{R} = \frac{\Delta}{R}.$$

Der Zähler Δ läßt sich in bekannter Weise als Determinante schreiben:

$$\Delta = (-1)^{\frac{l-1}{2}} \begin{vmatrix} \lg \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} & \lg \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} & \cdots \lg \sqrt{\frac{\lambda_{l-1}}{\lambda_{l-2}}} \\ \lg \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} & \lg \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} & \cdots \lg \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_{l-1}}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lg \sqrt{\frac{\lambda_{l-1}}{\lambda_{l-2}}} & \lg \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_{l-1}}} & \cdots \lg \sqrt{\frac{\lambda_{l-3}}{\lambda_{l-4}}} \end{vmatrix}.$$

Setzt man

$$\varepsilon_r = \sqrt{\frac{\lambda_r}{\lambda_{r-1}}},\ r = 1, 2, \ldots l-1, l,\ \text{wo (wegen } \lambda_0 = \lambda_l)\ \varepsilon_l = \sqrt{\frac{\lambda_l}{\lambda_{l-1}}} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_{l-1}}},$$

so sind ε_r die Relativnormen der Kreiseinheiten

$$\sqrt{\frac{(Z^{R^r}-1)(Z^{-R^r}-1)}{(Z^{R^{r-1}}-1)(Z^{-R^{r-1}}-1)}}$$

in bezug auf k, also selbst Einheiten.

Somit folgt schließlich:

II. $$h = \frac{\Delta}{R},\quad \Delta = (-1)^{\frac{l-1}{2}} \begin{vmatrix} \lg \varepsilon_1 & \lg \varepsilon_2 \cdots \lg \varepsilon_{l-1} \\ \lg \varepsilon_2 & \lg \varepsilon_3 \cdots \lg \varepsilon_l \\ \cdots & \cdots \\ \lg \varepsilon_{l-1} & \lg \varepsilon_l \cdots \lg \varepsilon_{l-3} \end{vmatrix}$$

Grundfragen der Geometrie.

Von Herrn *M. Pasch* in *Gießen.*

I. Deduktive Darstellung der Geometrie.

Für die mathematische Forschung gilt es als ein Gebot, daß sie rein deduktiv vorgeht und, wo sie eine Ausnahme machen will, die in der Deduktion entstehenden Lücken durch sog. Axiome genau bezeichnet. Dieses Gebot, dem sich die weiterbauende Arbeit unterwirft, muß folgerichtig auch der darstellenden Arbeit als Richtschnur dienen. Es führt zu einer Darstellung, bei der alles aus einem Vorrat von „Kernsätzen", die „Kernbegriffe" miteinander verknüpfen, kurz aus einem „Kern", herauswächst*). Dabei werden in den Kernsätzen der Geometrie, die ja von der Arithmetik abhängig ist, neben den geometrischen Kernbegriffen auch arithmetische Begriffe zugezogen.

Die entsprechende Aufgabe kann man sich für ein Teilgebiet, das aus Lehrsätzen besteht, z. B. die projektive Geometrie, stellen und demgemäß das Teilgebiet auf eine Gruppe von „Stammsätzen", die „Stammbegriffe" miteinander verknüpfen, kurz auf einen „Stamm", zurückführen**). Innerhalb der projektiven Geometrie selbst eröffnet sich bei dem in den „V. über n. G." befolgten Vorgehen ein solches Teilgebiet an der Stelle, wo die vom „physischen Punkt" ausgegangene Entwicklung beim „mathematischen Punkt" angelangt ist.

*) Siehe hierzu: Archiv der Mathematik und Physik 1916 Bd. 24 S. 276.

**) Siehe hierzu: Vorlesungen über neuere Geometrie 1882, zweite Ausgabe 1912 (Sachverzeichnis in der zweiten Ausgabe); Veränderliche und Funktion 1914.

Die Beschränkung auf das Projektive ist jedoch nicht wesentlich. Aus der ganzen Geometrie kann man einen Unterbau absondern, der vom physischen Punkt zum mathematischen aufsteigt, und ein Lehrgebäude errichten, das nur den mathematischen Punkt kennt, keinen physischen. Dieses Lehrgebäude entwickelt sich aus einem Stamm, der Unterbau aus einem Kern. Als Geometrie wird herkömmlicherweise bloß ein solches Lehrgebäude hingestellt, nicht ein Lehrgebäude mit Unterbau. In der Tat ist ein von innerem Widerspruch freies*) Lehrgebäude der Geometrie auch dann möglich, wenn man die Frage nach Herkunft und Anwendbarkeit der Geometrie als für den Mathematiker gleichgültig ablehnt. Aber die Sätze einer solchen Geometrie sind im Sinn von „V. und F." § 69 lediglich „hypothetische Sätze", die „hypothetische Begriffe" miteinander verknüpfen. Eine solche Geometrie möchte ich daher „hypothetische Geometrie" nennen.

II. Anwendbarkeit der Geometrie.

Der Empirist wird die Geometrie, die ich hypothetische genannt habe, in ihrem Wortlaut benutzen können, falls sie logisch aufgebaut ist, aber in diesem Wortlaut nicht etwas bloß Hypothetisches sehen. Für den Empiristen ist der „Punkt", den er in der hypothetischen Geometrie antrifft und dem Namen nach beibehalten kann, kein hypothetischer, überhaupt kein unvermittelter, sondern ein abgeleiteter Begriff; ich habe ihn als „mathematischen Punkt" bezeichnet. Zwischen diesem und dem ursprünglichen, dem „physischen Punkt", muß ein Übergang hergestellt werden. Deshalb kann der Empirist die hypothetische Geometrie, d. h. hier: eine Geometrie, die mit der hypothetischen im Wortlaut übereinstimmt, sich zwar aneignen, aber nicht ohne ihr einen empirischen Unterbau zu bereiten.

Ich habe nur vom Punkt gesprochen. Das gleiche gilt aber auch für Gerade und Ebene, überhaupt Linie und Fläche. Wird nun die hypothetische Geometrie ohne empiristischen Unterbau gelassen, so stehen darin die Punkte, Linien und Flächen außerhalb allen Zusammenhangs

---

*) Siehe hierzu: Über den Bildungswert der Mathematik, akademische Festrede 1894, Seite 17; Grundlagen der Analysis 1909, Seite 134.

mit den Naturgegenständen*), und es ist nicht einzusehen, wie man dazu kommt, ein solches Lehrgebäude ohne weiteres auf die Naturgegenstände anzuwenden, es auch nur mit — gezeichneten oder „vorgestellten“ — Figuren zu begleiten. Zwar ist diese Frage gerade vom nicht-empiristischen Standpunkt aus seit jeher in ausgedehntem Maße erörtert worden, jedoch ohne eine Beantwortung zu finden, deren Gestalt und Gefüge den Anforderungen des Mathematikers entspräche.

III. Empiristische Geometrie.

In den „V. über n. G.“ habe ich — unter Ausschluß krummer Gebilde — die Geometrie so darzustellen gesucht, daß sie auf einem empiristischen Unterbau ruht, und daß auch der Unterbau durch reine Deduktion zustande kommt. Die metrischen Begriffe habe ich nur soweit betrachtet, als zur Begründung der projektiven Geometrie nötig war. Die Ungenauigkeit der geometrischen Begriffe wurde dabei berücksichtigt; doch bedürfen die wichtigen Fragen, die a. a. O. auf Seite 18 und 19 erwähnt sind, noch weiterer Untersuchung, um so beantwortet zu werden, daß sich das Ergebnis in Kernsätze fassen läßt**).

Der Weg vom physischen Punkt zum mathematischen führt über Zwischenglieder. Zuerst wird vom Punkt und der geraden Strecke, die begrenzt ist, zur geraden Linie oder Geraden, der Begrenzung fehlt, übergegangen, ebenso von der ebenen Fläche, die begrenzt ist, zur Ebene, der Begrenzung fehlt. Indem die Anwendung der Wörter: Punkt, Gerade, Ebene, über ihre „eigentliche“ Bedeutung hinaus erweitert wird,

---

*) Dies tritt scharf hervor, wenn man statt Punkt, Linie, Fläche etwa schreibt: Ding erster, zweiter, dritter Art; vgl. *Hilbert*, Grundlagen der Geometrie (1. Aufl. 1899) § 1. Die Geometrie, gleichviel ob empiristisch oder nicht, ist erst dann mathematisch einwandfrei, wenn alle Schlüsse ohne Hülfe von Figuren, überhaupt ohne Hülfe von „Anschauung“, eingesehen werden können; siehe die verschiedenen Ausführungen in den „V. über n. G.“ bezüglich der Rolle der Figuren bei Beweisen.

**) Diese Fragen berührt auch Herr *J. Hjelmslev* in der Abhandlung: Die Geometrie der Wirklichkeit, Acta Mathematica Bd. 40 Heft 1. 2 (1915). Doch geht er auf eine Zergliederung seines „praktischen Systems“ nicht ein; er vertritt den Standpunkt, daß „eine genaue logische Analyse in einzelne Axiome nach dem Euklidischen Muster sich immer als schwerfällig und unnatürlich erweisen wird“.

gesellen sich „ideale Elemente“ zu den eigentlichen. Indem man die Anwendung der Beziehungsbegriffe: Aneinanderliegen, Zwischenlage, getrennte Lage, entsprechend erweitert, gewinnt man die Stammbegriffe der projektiven Geometrie. Um die Stammsätze der projektiven Geometrie vollständig zu erhalten, muß Kongruenz, also metrische Geometrie zugezogen werden. Nunmehr werden Koordinaten und, unter Rücksichtnahme auf die Ungenauigkeit der geometrischen Kernbegriffe, arithmetische Gebilde eingeführt, die man als „mathematischen Punkt“, „mathematische Gerade“, „mathematische Ebene“ bezeichnen darf.

Damit ist der empiristische Unterbau vollendet, und es kann das Lehrgebäude, das ich als hypothetische Geometrie bezeichnen zu dürfen glaube, in Angriff genommen werden.

IV. Die einzelnen Stufen der Begriffsbildung.

Der Punkt, die Gerade, die Ebene, zu denen hier das Beiwort „mathematisch“ gesetzt wurde, vertragen genau dieselbe Handhabung wie der Punkt, die Gerade, die Ebene des nicht-empiristischen Geometers. Man wird daher das im Anfang zugesetzte Beiwort bald fortlassen, um die Ausdrucksweise herzustellen, die die allgemeine Gewohnheit für sich hat.

Die wiederholte Begriffserweiterung wird dadurch verdunkelt, daß die Verschiedenheit der Bedeutungen nicht durch Verschiedenheit der Namen augenfällig gemacht ist. Um die Verschiedenheit der Begriffe auch äußerlich hervortreten zu lassen, ohne die eben erwähnte Gewohnheit anzutasten, will ich den Punkt, die Linie, die Fläche des Empiristen etwa eine Stelle, einen Weg, eine Schale nennen, den geraden Weg eine Strecke, die ebene Schale eine Platte. Weg und Strecke, Schale und Platte, sind begrenzt. Aus ihnen wurde die Gerade und die Ebene abgeleitet; indem ich diese eine Bahn, ein Feld nenne, verlange ich, daß bei „Bahn“ und „Feld“ an Begrenzung nicht gedacht wird. Jetzt können die idealen Elemente definiert und mit den eigentlichen als „projektive“ zusammengefaßt werden. Sagt man etwa: Monade, Dyade, Triade, für den Punkt, die Gerade, die Ebene im Sinn der projektiven Geometrie des Empiristen, so werden durchweg die voneinander verschiedenen Begriffe durch Verschiedenheit der Namen auseinandergehalten.

Für die hypothetische Geometrie bleiben die Namen: **Punkt**, **Linie**, **Fläche**, Gerade, Ebene, verfügbar.

Man pflegt auf der einen Stufe zu sagen: Zwei Geraden in einer Ebene haben nicht immer einen Punkt gemein, zwei Ebenen nicht immer eine Gerade; dagegen auf der höheren Stufe, nach Begriffserweiterung: Zwei Geraden in einer Ebene haben immer einen Punkt gemein, zwei Ebenen immer eine Gerade. Statt dessen kann ich sagen: Zwei Bahnen in einem Feld haben nicht immer eine Stelle gemein, aber immer eine Monade; zwei Felder haben nicht immer eine Bahn gemein, aber immer eine Dyade.

V. Das Beweisverfahren.

Ich war von dem Gebot rein deduktiver Darstellung der Mathematik ausgegangen. Dieses Gebot hat nichts damit zu tun, ob man den empiristischen oder einen anderen Standpunkt einnimmt; es gilt allgemein als maßgebend für das Beweisverfahren. Doch wird in mathematischen Schriften nur selten ausdrücklich gesagt, was unter dem mathematischen Beweis verstanden werden soll. Erwähnen möchte ich die Äußerungen von *Paul du Bois-Reymond* (1831—1889) in dem Werk: Die allgemeine Funktionentheorie (Teil 1, einziger Teil) 1882. Er sagt auf Seite 111: „Ein Beweis wie eine Erklärung ist doch schließlich, allgemein zu reden, die Herstellung einer logisch befriedigenden Vorstellungsfolge zwischen einer Vorstellung, die uns beunruhigt, und solchen Vorstellungen, die unsern Frieden nicht stören"; auf Seite 290: „Ja man wird sogar verlangen dürfen, daß Schlüsse und Beweise arithmetische Genauigkeit besitzen, und nicht durch die geometrische Phantasie auszufüllende Lücken aufweisen, weil solche arithmetische Genauigkeit für die Vollständigkeit des Schlußnetzes die zuverlässigste Bürgschaft leistet."

So entfernt diese Äußerungen davon sind, das Beweisverfahren der Mathematik deutlich zu beschreiben, so könnte man doch wenigstens für das Gebiet der Geometrie an die Forderung der „arithmetischen Genauigkeit" anknüpfen. Zum Wesen der reinen Deduktion gehört,

daß jeder Beweis sich „atomisieren", d. h. in Schritte gewisser Art auflösen läßt oder in einem einzelnen solchen Schritt besteht. Welcher Art die Beweisschritte sein müssen, habe ich besonders in den „Gr. der An." zu beschreiben gesucht. Näheres Eingehen lehrt, daß das Prüfen der einzelnen Beweisschritte auf Voraussetzungen beruht, von denen die einfachste hier erwähnt sei: Wenn zwei Wortgefüge vorliegen, so ist „entscheidbar", ob sie dieselbe Aussage einkleiden, m. a. W.: denselben Inhalt haben. „Nicht entscheidbar" ist dagegen die Frage, ob eine vorgelegte Aussage aus einem vorgelegten Bestand von Aussagen gefolgert werden kann.

In dem angeführten Werk sagt du Bois-Reymond auf Seite 133: „Noch heute erscheinen in der „unfehlbarsten aller Wissenschaften" kaum zwei Lehrbücher hintereinander, die, wenn sie auf die Grundbegriffe näher eingehen, nicht auf das schroffste sich widersprächen." Solche Gegensätze können nur dadurch verringert werden, daß man einen vollkommenen Einblick in das Gefüge der Deduktion anstrebt. Vollkommener Einblick kann aber nur durch „Atomisieren" erworben werden.

Bei diesen Untersuchungen zeigen sich, wie schon oben zu erkennen war, die „Entscheidbarkeitsfragen", die auf *Kronecker* (1823—1891) zurückzuführen sind, als unabweisbar. Siehe in „V. und F." § 76.

VI. Die Kernsätze für Gerade und Ebene.

Aus der Absicht der „V. über n. G.", vom empiristischen Standpunkt aus die Geometrie — unter Ausschluß krummer Gebilde — rein deduktiv aufzubauen, erwuchs die Notwendigkeit, vor allem den einfachsten Tatsachen, auf denen die von Metrik freien Sätze über Gerade und Ebene (Bahn und Feld) beruhen, nachzuspüren und sie in Kernsätze zu fassen. Die Anzahl der Kernsätze, die sich so ergaben, war unerwartet groß; sie stieg jedoch noch bei der eingehenderen Bearbeitung eines kleinen Stücks in der zweiten Ausgabe des Werks. In der ersten Ausgabe war „Atomisierung" im vollen Sinn nicht durchgeführt. Ohne diese kann man aber nicht auf den Grund sehen.

Die eingehendere Bearbeitung in der zweiten Ausgabe bezog sich nur auf die gerade Strecke, durch die die gerade Linie (die Bahn) vor-

bereitet wird, nicht auf die ebene Fläche (die Platte) und die Ebene (das Feld). Die Bearbeitung dieser Gebilde übernahm Fräulein *Sturmfels*; das Ergebnis ist in ihrer Doktordissertation niedergelegt*). Die Anzahl der Kernsätze mußte dabei abermals steigen. Ob die so ermittelten und als Kernsätze ausgesprochenen Grundtatsachen sich auf eine kleinere Anzahl zurückführen lassen, überhaupt ob sich der gewonnene Kern mit Erfolg durch einen anders gestalteten ersetzen läßt, welche Gestalt dann anderen vorzuziehen wäre, bleibt dahingestellt. Die Vollständigkeit zu sichern, ist die erste Aufgabe; zu einer befriedigenden Lösung wird es notwendig sein, auch die krummen Gebilde zu untersuchen und der Ungenauigkeit der geometrischen Begriffe Rechnung zu tragen.

Für die Wahl der Kernbegriffe war mir der Gesichtspunkt maßgebend, daß die mathematischen Begriffe tunlichst so erklärt werden sollen, wie sie entstanden sind oder entstanden sein können. Darum mußte die Ebene (das Feld) durch die ebene Fläche (die Platte) vorbereitet, nicht durch eine von diesem Begriff freie Definition eingeführt werden. Von diesem Gesichtspunkt ist auch Fräulein *Sturmfels* ausgegangen.

---

*) *Anna Sturmfels*, Nachprüfung der Lehre von den Ebenen in *Pasch*'s Vorlesungen über neuere Geometrie. Marburg 1915.

Über sogenannte perfekte Körper.

Von Herrn *Alexander Ostrowski* in Marburg a. d. L.

1. Ordnet man jedem Element a eines Körpers*) K eine nicht negative Zahl $\|a\|$ zu, und sind bei dieser Zuordnung die Bedingungen erfüllt:

$$\|ab\| = \|a\| . \|b\|,$$

$$\|1 + a\| \leqq \text{Max}\,(1, \|a\|), \text{ also auch } \|a + b\| \leqq \text{Max}\,(\|a\|, \|b\|); \tag{1.}$$

ist ferner $\|0\| = \|0\|$ und $\|a\|$ für wenigstens ein a aus K von 0 und 1 verschieden (woraus sofort $\|1\| = 1$, $\|a\| > 0$ für $a \neq 0$ folgt), so heißt nach Hrn. *J. Kürschák***) diese Zuordnung eine *Bewertung* des Körpers K, die Zahl $\|a\|$ die *Bewertung* des Elementes a, K selber ein *bewerteter* Körper***).

*) Unter einem Körper verstehen wir einen Bereich von Elementen (Größen), zwischen welchen zwei Verknüpfungsoperationen—Addition und Multiplikation—definiert sind, für die das assoziative, kommutative und distributive Gesetz gilt, und die unbeschränkt (außer der Division durch 0) eindeutige Umkehrungen zulassen. Vgl. die für die algebraische Körpertheorie fundamentale Abhandlung von *E. Steinitz*, Algebraische Theorie der Körper, d. J., Bd. 137, S. 167-309, in der auch die Beweise der von uns weiterhin benutzten Sätze der algebraischen Körpertheorie zu finden sind.

**) *J. Kürschák*, Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, d. J., Bd. 142, S. 211-253.

***) Herr *Kürschák* definiert die Bewertung durch etwas allgemeinere Forderungen

$$\|ab\| = \|a\| \cdot \|b\|, \qquad \|1 + a\| \leqq 1 + \|a\|, \qquad \|a + b\| \leqq \|a\| + \|b\|;$$

in einer demnächst in den „Acta Mathematica“ erscheinenden Arbeit: Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(xy) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ weise ich jedoch nach, daß diese Forderungen fast in allen Fällen die Relationen (1.) zur Folge haben. Eine Ausnahme bildet nur die Zuordnung jeder Zahl a eines Unterkörpers K des Körpers aller gewöhnlichen komplexen Zahlen Z der Zahl $|a|^s$ $(0 < S \leqq 1)$ und die daraus durch die verschiedenen Abbildungen von K auf andere Unterkörper von Z und auf sich selbst hervorgehenden Zuordnungen. Für diesen Fall sind jedoch die wichtigsten Fragen der Bewertungtheorie trivial.

Aus (1.) folgt offenbar allgemein

(2.) $\|a \pm b\| \geqq \|a\| - \|b\|; \|a + b + \cdots + c\| \leqq \mathrm{Max}(\|a\|, \|b\|, \ldots, \|c\|)$.

Läßt sich einer Folge $\ldots, a_i, \ldots$ der Elemente von K ein solches Element A von K zuordnen, daß $\lim\limits_{n=\infty} \|A - a_n\| = 0$ ist, so nennt man A den Limes der konvergenten Folge $\ldots, a_i, \ldots$ und schreibt $\lim\limits_{n=\infty} a_n = A$. Dann ist, wie man leicht sieht, $\lim\limits_{n=\infty} \|a_{n+k} - a_n\| = 0$ bei beliebigen positiven p. Folgen $(\ldots, a_i, \ldots)$ mit dieser Eigenschaft: $\lim\limits_{n=\infty} \|a_{n+p} - a_n\| = 0$ heißen Fundamentalfolgen. Besitzt jede Fundamentalfolge aus K einen Limes in K, so heißt K *perfekt*. Mit Hülfe der Relationen (1.) und (2.) lassen sich aus den Definitionen der Fundamentalfolge und des Limes ohne weiteres einige einfache Sätze ableiten, die genau ebenso lauten, wie in der gewöhnlichen Funktionentheorie und die wir oft benutzen werden, ohne sie besonders hervorzuheben. — Nicht jeder bewertete Körper ist perfekt, jeder kann aber als bewerteter Unterkörper eines perfekten Körpers betrachtet werden*).

Ist $\mathfrak{K}$ eine algebraische**) Erweiterung von K, so läßt sich stets jedem nicht in K liegenden Element α von $\mathfrak{K}$ eine solche Zahl $\|\alpha\|$ zuordnen, daß die Bedingungen (1.) erfüllt werden und eine Bewertung des Körpers $\mathfrak{K}$ entsteht, bei der die Elemente von K ihre ursprünglichen Bewertungen behalten. — Auch in der Folge betrachten wir stets nur solche Bewertungen von Erweiterungen eines bewerteten Körpers K, bei denen die Elemente von K ihre Bewertungen behalten. —

In der vorliegenden Abhandlung soll nun die folgende Frage untersucht werden: Unter welchen Umständen ist eine bewertete algebraische Erweiterung $\mathfrak{K}$ eines *perfekten* bewerteten Körpers selber perfekt?

---

*) Man kann nämlich, wie Herr *Kürschák* (a. a. O., S. 222-228) es genauer ausführt, durch Adjunktion der Ideallimes genau ebenso wie bei der Einführung der Irrationalzahlen eine perfekte Erweiterung eines gegebenen Körpers erhalten, die Herr *Kürschák* als dessen *derivierten Körper* bezeichnet.

**) Unter einer algebraischen Erweiterung $\mathfrak{K}$ von K versteht man einen solchen K umfassenden Körper, dessen sämtliche Elemente in bezug auf K *algebraisch* sind, d. h. gewissen algebraischen Gleichungen mit Koeffizienten aus K genügen. Dabei heißt der Grad der in K irreduziblen Gleichung, der ein Element a von $\mathfrak{K}$ genügt, der Grad von a in bezug auf K.

Wir werden folgende Sätze beweisen:

1. *Jede endliche*) bewertete Erweiterung* $\mathfrak{K}$ *eines perfekten Körpers K ist perfekt.*

2. *Jede algebraische bewertete Erweiterung* $\mathfrak{K}$ *eines perfekten Körpers K, die Größen von beliebig hohem Grade in bezug auf K enthält, ist nicht perfekt.*

3. *Die kleinste algebraisch abgeschlossene**) bewertete Erweiterung* $\mathfrak{K}$ *eines perfekten Körpers K ist dann und nur dann perfekt, wenn sie endlich in bezug auf K ist.*

In einer früheren Abhandlung***) habe ich bereits den Satz 3. vollständig, die Sätze 1. und 2. aber nur unter der Voraussetzung bewiesen, daß jede Größe aus $\mathfrak{K}$ einer in K irreduziblen Gleichung *mit lauter von einander verschiedenen Wurzeln* genügt. Während jedoch dort sehr tiefliegende Sätze der allgemeinen Körpertheorie benutzt werden mußten, ist jetzt die Beweisführung viel elementarer.

Die *Hensel*schen p-adischen Zahlkörper†) lassen sich so bewerten††), daß man jeder p-adischen Zahl a mit der Ordnungszahl n die Bewertung e^{-cn} zuordnet, wo c eine feste positive Zahl ist. Die Fundamentalfolgen in diesen Körpern lassen sich oft auffassen als Folgen der Teilsummen gewisser nach ganzen und gebrochenen Potenzen von p fortschreitenden Reihen. Dies legt die Frage nahe, ob man nicht aus der Gestalt solcher p-adischen Reihen entnehmen kann, ob ihre Grenzwerte in den entsprechenden per-

---

*) *Endlich* in bezug auf K heißt jede Erweiterung $\mathfrak{K}$ von K, deren sämtliche Elemente sich durch eine endliche Anzahl von ihnen linear mit Koeffizienten aus K darstellen lassen. Eine endliche Erweiterung von K ist immer algebraisch in bezug auf K.

**) Darunter versteht man eine solche algebraische Erweiterung von K, in der jede in K irreduzible algebraische Gleichung mit einer Unbekannten in lauter lineare Gleichungen zerfällt.

***) Über einige Fragen der allgemeinen Körpertheorie, d. J., Bd. 143, S. 255-284.

†) Vgl. *K. Hensel*, Über die arithmetischen Eigenschaften der Zahlen, Jahresbericht d. D. M. V., Bd. 16, S. 475-479.

††) Vom Standpunkt der Bewertungstheorie ist die Theorie der p-adischen Zahlen von Herrn *Kürschák* behandelt worden. Vgl. besonders a. a. O. S. 221, 229-232, 250. Überhaupt kann, wie uns scheint, ein vollständiger Einblick in die Natur dieser merkwürdigen Bildungen nur vom allgemeinen Standpunkt der Bewertungstheorie gewonnen werden.

fekten Erweiterungen algebraisch sind oder „transzendent“. Diese Frage wird in 9. behandelt.

2. Bei dem Beweise des Satzes 1 dürfen wir annehmen, daß $\mathfrak{R}$ aus K durch Adjunktion einer Größe α entsteht, die einer in K irreduziblen Gleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

genügt, da man jede endliche Erweiterung von K durch endlich viele Adjunktionen dieser Art bilden kann. Dann läßt sich jede Größe aus $\mathfrak{R} = K(\alpha)$ auf eine einzige Weise in der Form $\varphi(\alpha)$ darstellen, wo $\varphi(x)$ eine ganze rationale Funktion mit Koeffizienten aus K und von kleinerem als n-tem Grade.

Wir nennen eine Folge von Funktionen $f_i(x) \equiv a_{n-1}^{(i)}x^{n-1} + \cdots + a_1^{(i)}x + a_0^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ mit Koeffizienten aus K *konvergent*, wenn jede Folge $a_j^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ konvergiert, und eine Funktion $\Phi(x) \equiv A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1x + A_0$ ihre *Limesfunktion*, wenn jede Folge $a_j^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ A_j als Limes hat. Da K perfekt ist, so besitzt jede konvergente Folge $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ von Funktionen mit Koeffizienten aus K eine Limesfunktion $\Phi(x)$ mit Koeffizienten aus K und es ist $\Phi(\alpha) = \operatorname{Lim}_{i=\infty} f_i(\alpha)$. Wir brauchen daher zum Beweise des Satzes 1. nur zu zeigen, daß, wenn

$$(3.) \qquad \varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \ldots, \varphi_i(\alpha), \ldots$$

eine beliebige Fundamentalreihe aus $\mathfrak{R}$ ist, die Funktionenfolge $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ konvergent ist. Sind alle $\varphi_i(x)$ vom 0-ten Grade in bezug auf x, so ist dies selbstverständlich. Es sei dies für den Fall bewiesen, daß die Grade aller Funktionen φ_i kleiner als eine ganze Zahl $\nu < n$ sind. Es seien nun die Grade der Funktionen $\varphi_i(x)$ kleiner als $\nu + 1$ und die Koeffizienten von x^ν seien mit b_i bezeichnet. Ist die Folge b_i $(i = 1, 2, \ldots)$ konvergent, so ist unsere Behauptung ebenfalls richtig, denn zugleich mit der Folge b_i konvergiert auch die Folge $b_i\alpha^\nu$ $(i = 1, 2, \ldots)$, daher auch die Folge $\varphi_i(\alpha) - b_i\alpha^\nu$ $(i = 1, 2, \ldots)$, dann aber nach unserer Annahme auch die Funktionenfolge $\varphi_i(x) - b_ix^\nu$ $(i = 1, 2, \ldots)$, folglich auch die Funktionenfolge $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Wir nehmen nun an, daß die Folge b_i $(i = 1, 2, \ldots)$ nicht konvergiert. Dann gibt es der Definition der Konvergenz zufolge eine solche ins Unendliche wachsende Folge von ganzen positiven Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ und eine andere ebenfalls aus ganzen positiven Zahlen bestehende unendliche Folge $q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots$, daß die Bewertungen $\|b_{n_i} - b_{n_i+q_i}\|$ alle größer

sind als eine gewisse *positive* Zahl Q. Betrachten wir dann die Funktionenfolge

$$(4.) \qquad \psi_i(x) \equiv \frac{\varphi_{n_i}(x) - \varphi_{n_i+q_i}(x)}{b_{n_i} - b_{n_i+q_i}} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Alle $\psi_i(x)$ sind vom Grade ν und haben den Koeffizienten von x^ν gleich 1. Andrerseits ist $\operatorname{Lim}_{i=\infty} \varphi_i(\alpha) = 0$. Da die Koeffizienten von x^ν bei den $\psi_i(x)$ eine konvergente Folge bilden, ist auf die Folge (4.) das bereits Bewiesene anwendbar, und es ergibt sich, daß (4.) konvergiert und eine Funktion

$$\Psi(x) \equiv x^\nu + \cdots + c$$

zur Limesfunktion hat. Dann ist aber $\Psi(\alpha) = 0$, und α genügt einer Gleichung mit Koeffizienten aus K vom Grade $\nu < n$, was unmöglich ist. Daher muß die Folge $b_i (i = 1, 2, \ldots)$ notwendig konvergieren. Der Schluß von ν auf $\nu + 1$ ist also durchführbar, w. z. b. w.

3. Zum Beweise der Sätze 2. und 3. ist es notwendig, an einige algebraische Tatsachen zu erinnern. — Während in den gewöhnlichen Zahlkörpern jede irreduzible Funktion notwendigerweise lauter einfache Wurzeln besitzt, braucht dies bei den von *Weber* und *Steinitz* eingeführten allgemeinen Körpern nicht mehr der Fall zu sein. Gibt es namentlich eine Primzahl p von der Eigenschaft, daß das p-te Vielfache eines jeden Elementes eines Körpers K verschwindet (ist der Körper von der Charakteristik p), so verschwindet die Ableitung, daher auch die Diskriminante, jeder Funktion von der Form $x^{p^l} - a$ identisch, und solche Funktionen haben lauter gleiche Wurzeln in den Erweiterungen von K, in denen sie überhaupt Wurzeln besitzen. Allgemein heißt jede in K irreduzible Funktion, die lauter von einander verschiedene Wurzeln besitzt, *von der* 1*-ten Art* in bezug auf K, eine in K irreduzible Funktion dagegen, die lauter gleiche Wurzeln besitzt, *von der* 2*-ten Art* in bezug auf K. Jede in K irreduzible Funktion, die nicht lauter von einander verschiedene Wurzeln besitzt in einer Erweiterung von K, in der sie in Linearfaktoren zerfällt, hat die Form $f(x^{p^l})$, wo $f(x)$ von der 1-ten Art in bezug auf K ist. Sind in K alle natürlichen Primzahlen von 0 verschieden, (ist K von der Charakteristik 0), so ist jede in K irreduzible Funktion von der 1-ten Art. Eine in einer algebraischen Erweiterung von K enthaltene Größe, die eine Wurzel einer in K irreduziblen Funktion 2-ter, bzw. 1-ter Art ist, heißt selber von der 2-ten, bzw. 1-ten Art in bezug auf K. Eine algebraische Erweiterung von K, die lauter Elemente von der 1-ten, bzw. 2-ten Art in bezug auf K enthält, heißt entsprechend von der 1-ten, bzw.

2-ten Art in bezug auf K. Durch Adjunktion von lauter Elementen 1-ter, bzw. 2-ter Art entsteht aus K eine algebraische Erweiterung von der 1-ten, bzw. 2-ten Art. Es gilt der wichtige Satz von *Steinitz*: *Zu jeder algebraischen Erweiterung* $\mathfrak{K}$ *eines Körpers* K *gibt es eine in ihr enthaltene Erweiterung* 1*-ter Art* $\mathfrak{K}_0$ *von* K, *in bezug auf welche* $\mathfrak{K}$ *selbst eine Erweiterung* 2*-ter Art ist.* ($\mathfrak{K}_0$ kann auch mit K oder $\mathfrak{K}$ zusammenfallen.)

4. Nach dem Satz von *Kürschák* läßt sich jede algebraische Erweiterung $\mathfrak{K}$ eines *perfekten* Körpers K stets so bewerten, daß jeder Größe von $\mathfrak{K}$, die einer in K irreduziblen Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ genügt, die Zahl $\|a_n\|^{\frac{1}{n}}$ als Bewertung zukommt. Dann haben zwei in $\mathfrak{K}$ enthaltene in bezug auf K konjugierte Größen stets dieselbe Bewertung. Wir wollen noch eine wichtige Ergänzung dieses *Kürschák*schen Satzes beweisen, daß *diese Bewertung auch die einzig mögliche Bewertung von* $\mathfrak{K}$ *ist.*

Ist $f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ eine in K irreduzible Funktion 1-ter Art und adjungieren wir zu K sämtliche Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ von $f(x)$, so läßt sich der so entstehende Körper $K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ jedenfalls nach dem Vorgang von *Kürschák* bewerten, wobei $\|\alpha_1\|, \|\alpha_2\|, \ldots, \|\alpha_n\|$ sämtlich gleich $\|a_n\|^{\frac{1}{n}}$ sind. Dann folgen unter Benutzung von (1.) aus den Formeln

$$a_i = \pm \Sigma \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i$$

die Ungleichungen

$$\|a_i\| \leqq \|a_n\|^{\frac{i}{n}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.}$$

Ist aber die Funktion $f(x)$ nicht von der 1-ten Art, so läßt sie die Darstellung zu: $f(x) \equiv \varphi(x^{p^l})$, wo $\varphi(x)$ in K irreduzibel und von der 1-ten Art ist, und es ergeben sich durch die Anwendung von (5.) auf $\varphi(x)$ für die Koeffizienten von $f(x)$ wieder die Ungleichungen (5.). Sie gelten daher für jede in K irreduzible Funktion. Läßt sich nun $\mathfrak{K}$ auf irgend eine Weise bewerten und kommt dabei einer in $\mathfrak{K}$ liegenden Wurzel α einer in K irreduziblen Funktion $f(x) = x^n + \cdots + a_n = 0$ $(n > 1)$ eine Bewertung $\|\alpha\| > \|a_n\|^{\frac{1}{n}}$ zu, so folgt nach (5.)

$$\|\alpha^n\| > \|a_1 \alpha^{n-1}\|, \|\alpha^n\| > \|a_2 \alpha^{n-2}\|, \ldots, \|\alpha^n\| > \|a_n\|$$

und daher ist nach den Fundamentaleigenschaften (1.) der Bewertung $\|f(\alpha)\| = \|\alpha^n\| > \|a_n\| > 0$. Dann müßte aber $f(\alpha)$ von 0 verschieden sein, was der Annahme, daß α eine Wurzel von $f(x) = 0$ ist, widerspricht.

Ebenso wenig kann $\|\alpha\| < \|a_n\|^{\frac{1}{n}}$ sein, da daraus $\left\|\frac{1}{\alpha}\right\| > \left\|\frac{1}{a_n}\right\|^{\frac{1}{n}}$ folgen würde und $\frac{1}{a_n}$ das letzte Glied der in K irreduziblen Gleichung $\frac{1}{a_n} x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ ist, der $\frac{1}{\alpha}$ genügt. Daher muß notwendig $\|\alpha\| = \|a_n\|^{\frac{1}{n}}$ sein. — Wir werden in der Folge stets annehmen, daß eine algebraische Erweiterung eines perfekten Körpers auf diese einzig mögliche Art bewertet ist, ohne es besonders zu erwähnen. —

5. Sind $(\ldots, \alpha, \ldots)$ und $(\ldots, \beta, \ldots)$ irgend zwei beliebige Mannigfaltigkeiten von Größen aus einem bewerteten Körper K, so nennen wir die untere Grenze aller Zahlen $\|\alpha - \beta\|$ die Entfernung dieser Mannigfaltigkeiten von einander. Es gilt der folgende

Hilfssatz. *Zu jeder in einem perfekten Körper K irreduziblen Funktion $f(x)$ von der 1-ten Art gehört eine Zahl M von folgender Beschaffenheit: Es sei $\bar{K}$ eine ebenfalls perfekte Erweiterung von K, und $\bar{\bar{K}}$ der aus ihr durch Adjunktion aller Wurzeln von $f(x)$ entstehende bewertete Körper. Ist in ihm die Entfernung der Gesamtheit der Wurzeln von $f(x)$ vom Körper $\bar{K}$ kleiner als M, so gibt es unter den Wurzeln von $f(x)$ eine einzige, deren Entfernung von $\bar{K}$ kleiner als M ist, und zwar ist dann diese Wurzel im Körper $\bar{K}$ enthalten.*

Es zerfalle in irgend einer bewerteten Erweiterung von K $f(x)$ in Linearfaktoren $x - \alpha_1, x - \alpha_2, \ldots, x - \alpha_n$, und es sei $2M$ die kleinste unter den Zahlen $\|\alpha_i - \alpha_k\|$ $(i \gtrless k, i = 1, 2, \ldots n;\ k = 1, 2, \ldots n)$. Die nach der in 4. bewiesenen Tatsache von der Wahl der $f(x)$ zerfällenden bewerteten Erweiterung von K unabhängige Zahl M, die wir in der Folge *die zu $f(x)$ gehörende minimale Entfernung* nennen werden, besitzt nun die im Hilfssatz behauptete Eigenschaft. In der Tat, es sei für eine Größe γ aus $\bar{K}$ und eine der in $\bar{\bar{K}}$ liegenden Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ von $f(x)$, etwa α_1, $\|\alpha_1 - \gamma\| < M$. Dann kann für keinen von 1 verschiedenen Index i $\|\alpha_i - \gamma\| < M$ sein, da sonst nach (1.) auch $\|\alpha_1 - \alpha_i\| = \|(\alpha_1 - \gamma) - (\alpha_i - \gamma)\| < 2M$ wäre. Wäre nun aber die in $\bar{K}$ irreduzible Funktion, deren Wurzel $\alpha_1 - \gamma$ ist, nicht linear, dann wäre eine der Größen $\alpha_2 - \gamma, \alpha_3 - \gamma, \ldots, \alpha_n - \gamma$ mit $\alpha_1 - \gamma$ in bezug auf $\bar{K}$ konjugiert, es wäre daher für ein von 1 verschiedenes i $\|\alpha_i - \gamma\| = \|\alpha_1 - \gamma\| < M$. Aus dem hiermit bewiesenen Hilfssatz folgt nun ohne weiteres: *Es sei M die zu der im perfekten Körper K irreduziblen*

Funktion 1-*ter Art* $f(x) \equiv x^n + \cdots + a_n$ *gehörende minimale Entfernung.* $f(x)$ *besitzt in jeder perfekten Erweiterung* $\bar{K}$ *von* K *eine Wurzel, in der es eine Zahl* γ *gibt von der Beschaffenheit, daß* $\|f(\gamma)\| < M^n$ *ist.* Denn zerfällt $f(x)$ in einer bewerteten Erweiterung $\bar{\bar{K}}$ von $\bar{K}$ in Linearfaktoren $x-\alpha_1, x-\alpha_2, \ldots, x-\alpha_n$, so folgt aus $\|\gamma-\alpha_1\| \cdot \|\gamma-\alpha_2\| \cdots \|\gamma-\alpha_n\| < M^n$, daß für wenigstens ein i $\|\gamma-\alpha_i\| < M$ ist, und unser Hilfssatz ist anwendbar.

6. Wir beweisen nun: *Eine bewertete unendliche algebraische Erweiterung* 1-*ter Art* $\mathfrak{R}$ *eines perfekten Körpers* K *ist nicht perfekt.* Es sei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots$ eine unendliche Folge solcher Größen von $\mathfrak{R}$, die nicht alle zugleich in einer *endlichen* algebraischen Erweiterung von K enthalten sind. Die in K irreduzible Funktion, deren Wurzel α_i ist, sei allgemein durch $f_i(x)$ bezeichnet, die zu ihr gehörende minimale Entfernung durch r_i. Ist a eine beliebige Größe von K mit $0 < \|a\| < 1$, so lassen sich zwei unendliche Folgen

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots; \qquad t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$$

ganzer positiver Zahlen so bestimmen, daß allgemein

$$\text{(I)}\ \|a\|^{q_n} < \tfrac{1}{2} r_n; \qquad \text{(II)}\ \|a\|^{q_n} < \tfrac{1}{2}; \qquad \text{(III)}\ \|\alpha_{n+1}\| \cdot \|a\|^{t_n} < 1$$

wird. Dann bilden die Teilsummen $S_1, S_2, \ldots$ der unendlichen Reihe

$$\text{(6.)}\quad \alpha_1 + a^{q_1+t_1}\alpha_2 + a^{q_1+q_2+t_1+t_2}\alpha_3 + \cdots + a^{q_1+q_2+\cdots+q_n+t_1+t_2+\cdots+t_n}\alpha_{n+1} + \cdots$$

eine Fundamentalfolge, was nach (2.) daraus folgt, daß die Bewertung des allgemeinen Gliedes von (6.), $\|a\|^{q_1+\cdots+q_n+t_1+\cdots+t_n}\|\alpha_{n+1}\|$, nach (II) und (III) kleiner als $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ist. Nehmen wir nun an, daß in irgend einer algebraischen Erweiterung $\bar{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ der Limes S von (6.) enthalten ist, so läßt sich in $\bar{\mathfrak{R}}$ die Bewertung von $S - S_n$ so abschätzen:

$$\|S-S_n\| \leqq \|a\|^{q_1+\cdots+q_n+t_1+\cdots+t_n}\|\alpha_{n+1}\| + \cdots$$
$$= \|a\|^{q_1+\cdots+q_{n-1}+t_1+\cdots+t_{n-1}} \cdot \|a\|^{q_n}\{\|a\|^{t_n} \cdot \|\alpha_{n+1}\| + \|a\|^{q_{n+1}+t_n} \cdot \|a\|^{t_{n+1}} \cdot \|\alpha_{n+2}\| + \cdots\}$$

oder, wenn wir (I), (II) und (III) benutzen und beachten, daß $\|a\| < 1$ ist und $t_n, t_{n+1}, \ldots$ positiv sind:

$$\text{(7.)}\quad \|S-S_n\| < \|a\|^{q_1+\cdots+q_{n-1}+t_1+\cdots+t_{n-1}} \cdot \frac{1}{2} r\{1 + \frac{1}{2}\|a\|^{t_n} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \|a\|^{t_n+t_{n+1}} + \cdots\}$$
$$< \|a\|^{q_1+\cdots+q_{n-1}+t_1+\cdots+t_{n-1}} r_n.$$

Wir wollen nun auf Grund dieser Abschätzung zeigen, daß alle Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ in der endlichen algebraischen Erweiterung $K(S)$ von K enthalten sind. Da dies unserer Annahme über diese Größen widerspricht, so wird damit bewiesen werden, daß S nicht in $\bar{\mathfrak{R}}$ enthalten sein kann. Zuerst ist $K(S)$ nach dem Satz 1. perfekt. Sodann folgt aus (7.), daß

$\|S - S_1\| = \|S - \alpha_1\| < r_1$ ist; da nun r_1 die zur Funktion $f_1(x)$ gehörende minimale Entfernung ist, so muß α_1 nach dem Hilfssatz in 5. in $K(s)$ enthalten sein. Es sei von den Größen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ bereits nachgewiesen, daß sie in $K(S)$ enthalten sind. Dann ist S_{n-1} auch in $K(S)$ enthalten. Bezeichnen wir die ebenfalls in $K(S)$ enthaltene Größe $\frac{S - S_{n-1}}{a^{q_1+\cdots+q_{n-1}+t_1+\cdots+t_{n-1}}}$ durch γ, so folgt aus (7.)

$$\|\alpha_n - \gamma\| = \frac{\|S - S_n\|}{\|a\|^{q_1+\cdots+q_{n-1}+t_1+\cdots+t_{n-1}}} < r_n.$$

Daraus folgt aber nach dem Hilfssatz 1., daß auch α_n in $K(S)$ enthalten ist, w. z. b. w. Da also der Grenzwert der Fundamentalfolge $S_1, S_2, \ldots$ auch in keiner algebraischen Erweiterung von $\mathfrak{R}$ liegen kann, so kann der in irgend einer perfekten Erweiterung von $\mathfrak{R}$ liegende Limes dieser Folge als eine in bezug auf K „transzendente" Größe aufgefaßt werden. Durch unsere Überlegung ist daher zugleich bewiesen worden, daß *keine algebraische Erweiterung eines perfekten Körpers K, in der eine unendliche algebraische Erweiterung 1-ter Art von K enthalten ist, perfekt sein kann.*

7. Ein Gegenstück zu der in 6. bewiesenen Tatsache ist die folgende: *Kommen in einer algebraischen Erweiterung $\mathfrak{R}$ eines perfekten Körpers K von der Charakteristik p Wurzeln von in K irreduziblen Funktionen 2-ter Art von beliebig hohem Grade vor, so ist $\mathfrak{R}$ nicht perfekt.* Beweis. Nach der Annahme gibt es in $\mathfrak{R}$ eine unendliche Folge solcher Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ und eine andere Folge solcher ganzen positiven mit n beständig wachsenden Zahlen $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$, daß die Funktionen $f_n(x) \equiv x^{p^{l_n}} - \alpha_n^{p^{l_n}}$ in K irreduzibel sind. Es sei allgemein für jedes n durch r_n irgend eine positive Zahl < 1 bezeichnet, die kleiner ist, als die kleinste unter den Entfernungen der Größen $\alpha_n, \alpha_n^p, \ldots, \alpha_n^{p^{l_n-1}}$ vom Körper K. Wählen wir nun irgend eine Größe a aus K, für die $0 < \|a\| < 1$ ist, und bestimmen zwei unendliche Folgen $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ und $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ durch die Bedingungen

(I) $\|a\|^{q_n} < \frac{1}{2} r_n$; (II) $\|a\|^{q_n} < \frac{1}{2}$; (III) $\|a\|^{t_n} \cdot \|\alpha_{n+1}\| < 1$,

von denen jetzt die zweite aus der ersten folgt, so läßt sich wieder die unendliche Reihe

$$\alpha_1 + a^{q_1+t_1}\alpha_2 + a^{q_1+q_2+t_1+t_2}\alpha_3 + \cdots + a^{q_1+\cdots+q_n+t_1+\cdots+t_n}\alpha_{n+1} + \cdots$$

bilden und genau so wie in 6. die Konvergenz der Folge $S_1, S_2, \ldots$ ihrer Teilsummen dartun. Nehmen wir nun wieder an, daß in einer algebraischen Erweiterung $\bar{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ der Limes S der Fundamentalfolge $S_1, S_2, \ldots$ enthalten ist, und zwar genüge S der in K irreduziblen Gleichung $f(x) \equiv \varphi(x^{p^l}) = 0$,

wo $\varphi(x)$ eine in K irreduzible Funktion 1-ter Art ist. Dann gilt in $\bar{\Re}$ die genau ebenso wie in 6. zu beweisende Abschätzung:

$$(8.) \qquad \|S - S_n\| < \|a\|^{q_1+\cdots+q_{n-1}+t_1+\cdots+t_{n-1}} r_n.$$

Nun ist die in $\bar{\Re}$ liegende Größe S^{p^l}, die wir durch $\bar{S}$ bezeichnen, eine Wurzel von $\varphi(x)$. Andrerseits ist $\bar{S}$ der Limes der Folge der Teilsummen $S_1^{p^l}, S_2^{p^l}, \ldots$ der Reihe

$$\alpha_1^{p^l} + a^{\{q_1+t_1\}p^l}\alpha_2^{p^l} + a^{\{q_1+q_2+t_1+t_2}{}^{l}\alpha_3^{p^l} + \cdots + a^{\{q_1+\cdots+q_n+t_1+\cdots+t_n\}p^l}\alpha_{n+1}^{p^l} + \cdots$$

und aus (8.) folgt wegen $(S - S_n)^{p^l} = \bar{S} - S_n^{p^l}$ *)

$$(9.) \qquad \|\bar{S} - S_n^{p^l}\| < \|a\|^{\{q_1+\cdots+q_{n-1}+t_1+\cdots t_{n-1}\}p^l} \cdot r_n^{p^l}.$$

Ist nun zuerst $\varphi(x)$ linear, $\bar{S}$ also in K, daher auch in $\Re$ enthalten, so sei l_n die erste unter den Zahlen l_i, die größer als l ist. Dann sind alle Größen $\alpha_1^{p^l}, \alpha_2^{p^l}, \ldots, \alpha_{n-1}^{p^l}$, also auch $S_{n-1}^{p^l}$ in K enthalten, $\alpha_n^{p^l}$ dagegen nicht. Bezeichnen wir die in K liegende Größe $\dfrac{\bar{S} - S_{n-1}^{p^l}}{(a^{q_1+\cdots+q_{n-1}+t_1+\cdots+t_{n-1}})^{p^l}}$ durch γ, so folgt aus (9.)

$$\|\alpha_n^{p^l} - \gamma\| = \frac{\|\bar{S} - S_n^{p^l}\|}{\|a^{q_1+\cdots+q_{n-1}+t_1+\cdots+t_{n-1}}\|^{p^l}} = \frac{\|S - S_n\|^{p^l}}{\|a^{q_1+\cdots+q_{n-1}+t_1+\cdots+t_{n-1}}\|^{p^l}} < r_n^{p^l} < r_n.$$

Dies widerspricht aber der Annahme, daß r_n kleiner ist als die Entfernung von $\alpha_n^{p^l}$ vom Körper K. Damit ist dieser Fall erledigt.

Ist aber $\varphi(x)$ von höherem als 1-tem Grade, so sei m die zu $\varphi(x)$ gehörende minimale Entfernung und die ganze positive Zahl n so groß gewählt, daß $\|\bar{S} - S_n^{p^l}\| < m$ ist. Durch Adjunktion der Größen $\alpha_1^{p^l}, \alpha_2^{p^l}, \ldots, \alpha_n^{p^l}$ zum Körper K entsteht eine endliche, daher perfekte algebraische Erweiterung 2-ter Art von K, die auch $S_n^{p^l}$ enthält. Aus $\|\bar{S} - S_n^{p^l}\| < m$ folgt aber nach unserem Hilfsatz, daß diese Erweiterung auch die in bezug auf K algebraische Größe 1-ter Art $\bar{S}$ enthält, was unmöglich ist. Damit ist auch dieser Fall erledigt.

8. Es sei nun $\Re$ eine unendliche algebraische Erweiterung eines perfekten Körpers K und es sei der Unterkörper $\Re_0$ von $\Re$ die nach dem in 3. erwähnten Satze von *Steinitz* gewiß existierende Erweiterung 1-ter Art von K, in bezug auf die $\Re$ eine Erweiterung 2-ter Art ist. Ist $\Re_0$ unendlich in bezug auf K, so folgt aus der am Schlusse von 6. hervorgehobenen Tatsache, daß $\Re$ nicht perfekt ist. Ist aber der Körper $\Re_0$ endlich in bezug auf K, so ist er nach dem Satz 1 auch perfekt. Wird nun erstens angenommen, daß in $\Re$ Größen von beliebig hohem Grade in

*) Es ist bei allen Rechnungen in den Körpern mit einer Primzahlcharakteristik p zu beachten, daß alle Vielfachen von p verschwinden.

bezug auf K vorkommen, so enthält dann die unendliche algebraische Erweiterung 2-ter Art $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{K}_0$ auch Größen, die Wurzeln in $\mathfrak{K}_0$ irreduzibler Funktionen 2-ter Art von beliebig hohem Grade sind, denn sonst müßte jede Größe von $\mathfrak{K}$ in bezug auf $\mathfrak{K}_0$, daher auch in bezug auf K von *beschränktem* Grade sein. Folglich ist die in 7. bewiesene Tatsache anwendbar, und $\mathfrak{K}$ ist auch in diesem Falle nicht perfekt, womit der Satz 2 bewiesen ist. Nehmen wir zweitens an, daß $\mathfrak{K}$ die kleinste algebraische abgeschlossene Erweiterung von K ist, und ist $x^{p^l} - a = 0$ eine in $\mathfrak{K}_0$ irreduzible Gleichung, so ist für jedes ganze positive m die Gleichung $f_m(x) \equiv x^{p^{l+m}} - a = 0$ ebenfalls in $\mathfrak{K}_0$ irreduzibel. Denn bezeichnen wir die gewiß in $\mathfrak{K}$ liegende Wurzel von $f_m(x)$ durch α_m und hat $f_m(x)$ einen in $\mathfrak{K}_0$ irreduziblen Teiler $x^n + \cdots + \gamma$, so muß $\gamma = \alpha_m^n$ sein. Ist p^k der größte gemeinsame Teiler von p^{l+m} und n_2 $(k < l+m)$, so gibt es ganze Zahlen m_1, m_2, für die $p^k = m_1 p^{l+m} + m_2 n$ ist. Dann ist aber $\alpha_m^{p^k} = a^{m_1} \cdot \gamma^{m_2}$ in $\mathfrak{K}_0$ enthalten. Bezeichnen wir die ebenfalls in $\mathfrak{K}_0$ enthaltene Größe $(\alpha_m^{p^k})^{p^{l+m-k-1}}$ durch $\bar{a}$, so folgt aus $\bar{a}^p = a$:

$$x^{p^l} - a \equiv (x^{p^{l-1}} - \bar{a})^p,$$

was der Annahme, daß $x^{p^l} - a$ in $\mathfrak{K}_0$ irreduzibel ist, widerspricht.

Daher gibt es in $\mathfrak{K}$ auch in diesem Falle algebraische Größen 2-ter Art von beliebig hohem Grade in bezug auf $\mathfrak{K}_0$, und $\mathfrak{K}$ kann nicht perfekt sein.

Da andrerseits die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung $\mathfrak{K}$ eines perfekten Körpers K nach dem Satze 1 ebenfalls perfekt ist, wenn sie endlich in bezug auf K ist, so ist damit auch der Satz 3 bewiesen.

Durch die oben bewiesenen Sätze ist jedoch die Frage, wann eine unendliche algebraische Erweiterung $\mathfrak{K}$ eines perfekten Körpers K perfekt ist, noch nicht vollständig erledigt, namentlich im Falle, wo die Grade der Größen von $\mathfrak{K}$ in bezug auf K nicht beliebig groß werden. Für diesen Fall ist es mir nicht gelungen, zu irgend welchen abschließenden Resultaten zu gelangen. Daß es jedenfalls (im Falle einer Primzahlcharakteristik p) unendliche und doch perfekte Erweiterungen $\mathfrak{K}$ eines perfekten Körpers K geben kann, folgt daraus, daß der Körper $K^{\frac{1}{p}}$, der aus den p-ten Wurzeln aller Elemente von K besteht, mit K zugleich perfekt ist, da der Limes einer Fundamentalfolge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ aus $K^{\frac{1}{p}}$ die in $K^{\frac{1}{p}}$ enthaltene Größe $A^{\frac{1}{p}}$ ist, wo A den im perfekten Körper K enthaltenen Limes der Fundamentalreihe $\alpha_1^p, \alpha_2^p, \ldots$ bezeichnet. Denn es lassen sich leicht Beispiele von perfekten Körpern K angeben, in bezug auf welche die zugehörigen $K^{\frac{1}{p}}$ *unendlich*

sind. Es seien z. B. $x_1, x_2, \ldots$ unendlich viele von einander unabhängige Variablen und $\bar{K}$ sei der Körper aller rationalen Funktionen von diesen Variablen mit gewöhnlichen ganzen modulo eine Primzahl p zu nehmenden Zahlen als Koeffizienten. Den Körper aller rein formal aufzufassenden nach ganzen wachsenden Potenzen einer neuen Variablen P fortschreitenden unendlichen Reihen mit Größen aus $\bar{K}$ als Koeffizienten bezeichnen wir durch K. Um K zu bewerten, ordnen wir 1 allen von 0 verschiedenen Größen von $\bar{K}$ als Bewertung zu, der Variablen P aber eine beliebige positive Zahl < 1. Dann ist die Bewertung jeder Reihe aus K der Bewertung ihres ersten Gliedes gleich. Bei dieser Bewertung ist K, wie man leicht sieht, perfekt. Andrerseits ist $K^{\frac{1}{p}}$ in diesem Falle gewiß unendlich in bezug auf K, da zwischen den Größen $x_1^{\frac{1}{p}}, x_2^{\frac{1}{p}}, x_3^{\frac{1}{p}}, \ldots$, wie leicht zu sehen ist, keine lineare Relation mit Koeffizienten aus K bestehen kann.

9. Es sei durch $K(p)$, wie üblich, der Körper der rationalen p-adischen Zahlen bezeichnet, durch $\mathfrak{R}$ die kleinste algebraisch abgeschlossene Erweiterung von $K(p)$. $K(p)$ läßt sich so bewerten, daß man jeder Zahl a aus ihm mit der Ordnungszahl α die Zahl $e^{-c\alpha}$ als Bewertung zuordnet, wenn c eine feste positive Konstante bedeutet. Bei dieser Bewertung ist $K(p)$ perfekt. Daß $\mathfrak{R}$ nicht perfekt ist, habe ich in einer in der Einleitung zitierten Abhandlung bereits bewiesen. Doch ist dort eine Fundamentalfolge der Elemente von $\mathfrak{R}$, deren Limes nicht algebraisch in bezug auf $K(p)$ ist, auf eine etwas künstliche Weise gebildet worden. Durch eine Bemerkung des Herrn *Hensel* veranlaßt, daß es sich doch höchstwahrscheinlich auch allgemein von den Reihen von der Form

$$a_1 p^{\frac{1}{1}} + a_2 p^{\frac{1}{2}} + a_3 p^{\frac{1}{3}} + \cdots + a_n p^{\frac{1}{n}} + \cdots \qquad (a_n = 1, 2, \ldots, p-1)$$

beweisen läßt, daß ihre Summen in bezug auf K „transzendent" sind, habe ich einen sehr allgemeinen Satz über Transzendenz von Summen gewisser nach Potenzen von p fortschreitender Reihen gefunden. — Irgend eine perfekte Erweiterung (etwa den *Kürschák*schen derivierten Körper) von $\mathfrak{R}$ bezeichnen wir mit K. —

Wir wollen für jede Primzahl q eine beliebig, aber fest gewählte der (gewiß in $\mathfrak{R}$ enthaltenen) Wurzeln der Gleichung $x^q = p$ durch $p^{\frac{1}{q}}$ bezeichnen; ebenso wählen wir je eine der Wurzeln der Gleichungen $x^q = p^{\frac{1}{q}}$ und bezeichnen sie durch $p^{\frac{1}{q^2}}$ u. s. w. Ist weiter $q^\alpha r^\beta \ldots s^\gamma$ die Zerlegung

irgend einer ganzen rationalen Zahl m in Primfaktoren, so bestimmen wir irgend welche ganze Zahlen $a, b, \ldots c$ so, daß

$$\frac{a}{q^\alpha}+\frac{b}{r^\beta}+\cdots+\frac{c}{s^\gamma}=\frac{1}{m}$$

wird. Dann bezeichnen wir die Wurzel $\left(p^{\frac{1}{q^\alpha}}\right)^a\cdot\left(p^{\frac{1}{r^\beta}}\right)^b\cdots\left(p^{\frac{1}{s^\gamma}}\right)^c$ der Gleichung $x^m=p$ durch $p^{\frac{1}{m}}$. Ist endlich $\frac{n}{m}$ die Darstellung einer beliebigen rationalen Zahl t in reduzierter Form, so verstehen wir unter p^t die Zahl $\left(p^{\frac{1}{m}}\right)^n$ aus $\mathfrak{R}$. Damit ist jede gebrochene Potenz von p eindeutig erklärt, und zwar so, daß dabei die Gleichung $p^\alpha p^\beta=p^{\alpha+\beta}$ allgemein bestehen bleibt.

Es sei $E=(e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots)$ das System sämtlicher (in $\mathfrak{R}$ enthaltener) Wurzeln der Gleichungen $x^{p^f-1}=1$ für alle ganzen positiven f, oder, was auf dasselbe hinauskommt, aller (in $\mathfrak{R}$ enthaltenen) Einheitswurzeln mit durch p nicht teilbaren Graden. Alle Zahlen $e^{(i)}-1$ sind nun p-adische Einheiten, denn sonst müßte, weil alle $e^{(i)}$ ganze p-adische Zahlen sind, $\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)_{x=1}=n$ durch p teilbar sein, wenn $e^{(i)}$ eine n-te Einheitswurzel ist. Daher sind auch alle Differenzen $e^{(i)}-e^{(k)}\equiv e^{(i)}\left(\frac{e^{(i)}}{e^{(k)}}-1\right)$ Einheiten.

Ich betrachte nun die Reihen von der Form

$$S\equiv e_1 p^{n_1}+e_2 p^{n_2}+\cdots, \tag{10.}$$

wo $e_1, e_2, \ldots$ beliebige Elemente des Systems E und $n_1, n_2, \ldots$ beliebige monoton ins Unendliche wachsende rationale Zahlen sind. Die Reihen S sind gewiß konvergent und ihre Limes, die wir auch durch S bezeichnen, sind jedenfalls in K enthalten. Wir behaupten nun, daß jede Größe aus K, die eine Entwicklung von der Form (10.) besitzt, nur eine einzige solche Entwicklung haben kann. Denn besitzt sie etwa zwei solche Entwicklungen S_1 und S_2, und sind die ersten Glieder, in denen sich S_1 und S_2 unterscheiden, etwa ep^n und $\bar{e}p^{\bar{n}}$, so fängt, falls $\bar{n}=n$ ist, S_1-S_2 mit dem Gliede $(e-\bar{e})p^n$ an, dessen Ordnungszahl gleich n, die Bewertung also gleich e^{-cn} ist. Und da alle folgenden Glieder in S_1-S_2 gewiß größere Ordnungszahlen als n, also kleinere Bewertungen als e^{-cn} haben, ist auch die Bewertung von S_1-S_2 gleich e^{-cn}, und S_1-S_2 ist von 0 verschieden. Ist aber etwa $n<\bar{n}$, so fängt S_1-S_2 mit ep^n an, hat daher die Bewertung e^{-cn}, ist also ebenfalls von 0 verschieden. — Wir werden die Exponenten $n_1, n_2, \ldots$ in den Reihen (10.) uns immer in reduzierter Form gegeben denken, so daß der Zähler von n_i mit dem positiven Nenner von n_i keinen gemeinsamen Teiler hat. —

Wir beweisen nun weiter: Läßt eine in bezug auf $K(p)$ algebraische p-adische Zahl a eine Entwicklung von der Form (10.) zu, so sind die Koeffizienten $e_1, e_2, \ldots$ ihrer Entwicklung alle in einem in bezug auf K endlichen Körper enthalten, die Nenner aber der Exponenten $n_1, n_2, \ldots$ alle beschränkt, wachsen also gewiß nicht ins Unendliche. Es genüge a der in $K(p)$ irreduziblen Gleichung $f(x) = 0$ mit der minimalen Entfernung M. Ist (10.) die Entwickelung von a, so sei S_n eine solche Teilsumme von (10.), daß $\|a - S_n\| < M$ ist. Adjungieren wir nun $e_1, e_2, \ldots, e_n;\ p^{n_1}, p^{n_2}, \ldots, p^{n_n}$ zu $K(p)$, so entsteht ein nach dem Satze 1 perfekter Körper $\bar{K}$, in dem a nach der Definition von M gewiß enthalten ist. Es sei m das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner der Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_n$. Dann ist $p^{\frac{1}{m}}$ in $\bar{K}$ enthalten, und $p^{n_1}, \ldots, p^{n_n}$ lassen sich als Potenzen von $p^{\frac{1}{m}}$ darstellen. Ist andrerseits $\bar{E} = (e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(l)})$ das System aller im Körper $\bar{K}$ enthaltenen Einheitswurzeln mit durch p nicht teilbaren Graden, so läßt sich in der Form

$$(11.)\quad \bar{e}_{-d}\left(p^{\frac{1}{m}}\right)^{-d} + \bar{e}_{-d+1}\left(p^{\frac{1}{m}}\right)^{-d+1} + \cdots + \bar{e}_i\left(p^{\frac{1}{m}}\right)^{i} + \cdots \quad (\bar{e}_i = e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(l)})$$

jede Zahl von $\bar{K}$ darstellen, *also auch* a. Denn sowohl alle Zahlen von $K(p)$ als auch die Zahlen $e_1, \ldots, e_n,\ p^{n_1}, \ldots, p^{n_n}$ lassen sich in der Form (11.) darstellen. Beweisen wir also, daß die Gesamtheit aller Zahlen (11.) einen Körper bildet, so muß dieser Körper, da er im perfekten Körper $\bar{K}$ gewiß enthalten ist, mit $\bar{K}$ identisch sein. Nach einem von *Hensel* herrührenden Satze*) entsteht aber aus $K(p)$ durch Adjunktion aller in einer endlichen Erweiterung $\bar{K}$ von $K(p)$ enthaltenen Einheitswurzeln $\bar{E} \equiv (e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(l)})$ ein Körper, — der sogenannte *Koeffizientenkörper* von $\bar{K}$ —, dessen sämtliche Zahlen sich nach ganzen Potenzen von p mit Koeffizienten aus dem System $\bar{E}$ dieser Einheitswurzeln entwickeln lassen. Mit Hilfe der nach diesem Satz möglichen Entwickelungen lassen sich offenbar alle Summen, Produkte und Quotienten aus den Reihen (11.) wieder durch ebensolche Reihen darstellen, w. z. b. w.

Wir können daher den Satz aussprechen: *Dann und nur dann ist der Limes einer Reihe von der Form* (10.) *algebraisch in bezug auf* $K(p)$, *wenn alle Koeffizienten* $e_1, e_2, \ldots$ *in einer endlichen Erweiterung von* $K(p)$ *liegen — daher alle Potenzen einer gewissen Einheitswurzel sind — und die Nenner aller Zahlen* $n_1, n_2, \ldots$ *beschränkt sind.*

*) *K. Hensel*, Theorie der algebraischen Zahlen, Bd. 1, S. 189, der letzte Satz des § 3 für $\alpha = \eta,\ \pi = p$. Vgl. auch d. J., Bd. 136, S. 193—194.

Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind.

Von Herrn *J. Schur* in Berlin.

Die im nachfolgenden mitgeteilten Untersuchungen stehen in enger Beziehung zu der von *C. Carathéodory**) entwickelten und von *O. Toeplitz***) in einem wichtigen Punkte ergänzten Theorie der im Innern des Einheitskreises konvergenten Potenzreihen mit positivem reellem Bestandteil. Auf Grund dieser Theorie haben bereits *Carathéodory* und *Fejér****) einen interessanten Satz über Funktionen abgeleitet, die im Kreise $|x| < 1$ regulär und beschränkt sind. Im folgenden wird die Theorie dieser Funktionen nach einigen Richtungen etwas weiter ausgebaut. Dies geschieht nicht mit Hilfe der *Carathéodory*schen Ergebnisse, sondern auf direktem Wege. Der hier eingeführte kettenbruchartige Algorithmus liefert sehr leicht eine an und für sich wichtige Parameterdarstellung für die Koeffizienten der zu betrachtenden Potenzreihen. Die für diese Parameterdarstellung geltenden, in § 3 bewiesenen Sätze II und III enthalten bereits im wesentlichen den Hauptinhalt der zu entwickelnden Theorie. Es bedarf nur noch einer rein rechnerischen Umformung der gewonnenen Ausdrücke, um von dem Satze II zu dem Hauptergebnis dieser Arbeit, dem Satze VIII des § 6, zu gelangen. Aus diesem Satz lassen sich die *Carathéodory - Toeplitz*schen

---

*) Math. Ann. Bd. 64 (1907), S. 95 und Rend. di Palermo, Bd. 32 (1911), S. 193. — Auf anderem Wege sind die *Carathéodory*schen Sätze bewiesen worden von *E. Fischer* (Rend. di Palermo, Bd. 32, S. 240), *G. Herglotz* (Leipz. Berichte 1911, S. 501), *G. Frobenius* (Berl. Berichte 1912, S. 16) und dem Verf. (ebenda, S. 4). Vgl. auch *F. Riesz*, Ann. de l'École Norm. 1911, S. 33 und Journ. f. Math. Bd. 146 (1915), S. 83.

**) Gött. Nachrichten 1910, S. 489 und Rend. di Palermo, Bd. 32, S. 191.

***) Rend. di Palermo, Bd. 32, S. 131—235. — Vergl. auch *T. H. Gronwall*, Annals of Math. Bd. 16 (1914), S. 77 und *G. Pick*, Math. Ann. Bd. 77 (1915), S. 7.

Resultate unmittelbar ablesen, er folgt aber auch umgekehrt ohne Mühe aus diesen (vergl. § 8). Der interessante Satz X des § 7, der hier als Spezialfall des Satzes VIII erscheint, läßt sich auch, wenn man auf die Charakterisierung der Grenzfälle (Satz X*) verzichtet, mit Hilfe eines der wichtigen Sätze von *O. Toeplitz**) über sog. „L-Formen" leicht beweisen.

In einer zweiten Abhandlung, die gleichzeitig mit der vorliegenden der Redaktion überreicht worden ist und im nächsten Band dieses Journals erscheinen wird, werde ich einige Anwendungen der hier entwickelten Theorie behandeln.

§ 1.
Einführung des kettenbruchartigen Algorithmus.

Ist $w = f(x)$ eine im Innern des Einheitskreises reguläre analytische Funktion**), so nenne ich die obere Grenze der Zahlen $|f(x)|$ für $|x| < 1$ kurz *die obere Grenze der Funktion* $f(x)$ und bezeichne sie mit $M(f)$. Ebenso heißt a eine obere Schranke von $f(x)$, wenn $a \geqq M(f)$ ist. Es kann auch $M(f) = \infty$ sein. Ist $M(f)$ eine endliche Zahl, so wird $f(x)$ im Kreise $|x| < 1$ beschränkt genannt. Das bekannte *Schwarz*sche Lemma besagt nur, daß stets

$$M(f) = M(xf)$$

ist. Die Klasse derjenigen Funktionen $f(x)$, für die

$$M(f) \leqq 1 \tag{1.}$$

ist, bezeichne ich im folgenden mit $\mathfrak{E}$.

Bedeutet α eine reelle oder komplexe Zahl, die absolut kleiner als 1 ist, und versteht man wie üblich unter $\bar{\alpha}$ die zu α konjugiert komplexe Größe, so wird durch die lineare Transformation

$$w' = \frac{w - \alpha}{1 - \bar{\alpha} w}$$

der Einheitskreis $|w| \leqq 1$ in sich selbst übergeführt. Ist daher $f(x)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{E}$, so gilt dasselbe auch für die Funktion

$$g = \frac{f - \alpha}{1 - \bar{\alpha} f}$$

und umgekehrt. Insbesondere ist dann und nur dann $M(g) = 1$, wenn $M(f) = 1$ ist.

---

*) Math. Ann. Bd. 70 (1911), S. 351 (gemeint ist der Satz 5 dieser Arbeit).

**) Über das Verhalten von $f(x)$ für $|x| \geqq 1$ wird nichts vorausgesetzt.

Es sei nun

$$(2.) \qquad f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

eine für $|x| < 1$ konvergente Potenzreihe, die der Bedingung (1.) genügt. Dann ist $|c_0| \leqq 1$. Ist insbesondere $|c_0| = 1$, so reduziert sich $f(x)$ auf die Konstante c_0. Ist aber $|c_0| < 1$, so bilde man, wenn c_0 auch mit γ_0 bezeichnet wird, den Ausdruck*)

$$f_1 = \frac{1}{x}\frac{f - \gamma_0}{1 - \bar{\gamma}_0 f} = \frac{c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots}{1 - \gamma_0\bar{\gamma}_0 - \bar{\gamma}_0 c_1 x - \bar{\gamma}_0 c_2 x^2 - \cdots}.$$

Diese Funktion verhält sich ebenso wie $f(x)$ im Kreise $|x| < 1$ regulär und gehört auch zur Klasse $\mathfrak{E}$; ferner ist dann und nur dann $M(f_1) = 1$, wenn $M(f) = 1$ ist. Setzt man

$$\gamma_1 = f_1(0) = \frac{c_1}{1 - \bar{c}_0 c_0},$$

so wird also $|\gamma_1| \leqq 1$. Gilt hier das Gleichheitszeichen, so wird f_1 konstant gleich γ_1. Ist aber $|\gamma_1| < 1$, so setze ich

$$f_2 = \frac{1}{x}\frac{f_1 - \gamma_1}{1 - \bar{\gamma}_1 f_1}, \qquad \gamma_2 = f_2(0).$$

Setzt man nun dieses Verfahren fort, so erhält man eine endliche oder unendliche Folge von Funktionen

$$(3.) \qquad f_0 = f, f_1, f_2, f_3, \ldots,$$

zwischen denen die Gleichungen

$$(4.) \qquad f_{\nu+1} = \frac{1}{x}\frac{f_\nu - \gamma_\nu}{1 - \bar{\gamma}_\nu f_\nu}, \qquad f_\nu = \frac{\gamma_\nu + x f_{\nu+1}}{1 + \bar{\gamma}_\nu x f_{\nu+1}}, \qquad \gamma_\nu = f_\nu(0)$$

bestehen. Diese Funktionen gehören sämtlich zur Funktionenklasse $\mathfrak{E}$, genauer ist für jedes ν dann und nur dann $M(f_\nu) = 1$, wenn $M(f) = 1$ ist. Reduziert sich eine der Funktionen f_ν auf die Konstante γ_ν, so wird f eine allein durch $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu$ bestimmte rationale Funktion, die ich mit $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu]$ bezeichne. Die Funktionen (3.) nenne ich die *zu* $f(x)$ *adjungierten Funktionen*, die Konstanten γ_ν die *zu* $f(x)$ *gehörenden Parameter*.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Folge der zu $f(x)$ adjungierten Funktionen enthält unendlich viele Glieder. In diesem Falle sind die absoluten Beträge der Parameter γ_ν sämtlich *kleiner* als 1. Wird insbesondere für einen Wert von ν die Funktion $f_\nu(x)$ gleich der Konstanten γ_ν, so ist für $\lambda > \nu$

$$f_\lambda(x) = \gamma_\lambda = 0.$$

*) Vergl. *E. Landau*, Vierteljahrsschrift der Züricher Naturf. Ges. Bd. 51 (1906), S. 252.

2. Es gibt eine ganze Zahl n, für die

$$(5.) \qquad |\gamma_0|<1, |\gamma_1|<1, \ldots, |\gamma_{n-1}|<1, |\gamma_n|=1$$

wird. Die Folge (3.) besteht dann aus den $n+1$ Funktionen

$$f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n=\gamma_n$$

und $f(x)$ wird die rationale Funktion $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$.

Ich behaupte, *daß der zweite Fall dann und nur dann eintritt, wenn* $f(x)$ *eine rationale Funktion der Form*

$$(6.) \qquad f(x)=\varepsilon \prod_{\nu=1}^{n} \frac{x+\omega_\nu}{1+\bar{\omega}_\nu x}, \qquad 0 \leqq |\omega_\nu|<1, |\varepsilon|=1$$

darstellt, oder anders ausgedrückt, die Form

$$(6'.) \qquad f(x)=\varepsilon \frac{x^n+\bar{k}_1 x^{n-1}+\cdots+\bar{k}_n}{1+k_1 x+\cdots+k_n x^n}=\varepsilon \frac{x^n \bar{P}(x^{-1})}{P(x)}^{*})$$

hat, wobei $P(x)$ *höchstens vom Grade* n *ist und nur außerhalb des Einheitskreises verschwindet (oder überall gleich* 1 *ist).*

Ist nämlich $f(x)$ von der Form (6'.), so liegen die Pole dieser Funktion außerhalb des Einheitskreises, außerdem ist für $|x|=1$ auch $|f(x)|=1$. Daher gehört $f(x)$ gewiß zur Funktionenklasse $\mathfrak{E}$. Wir haben nur zu zeigen, daß

$$(7.) \qquad f(x)=[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$$

wird, wobei die Parameter γ_ν den Bedingungen (5.) genügen. Für $n=0$ ist dies gewiß richtig, da alsdann $f(x)=\varepsilon=[x; \varepsilon]$ wird. Ist aber $n>0$, so wird

$$\gamma_0=f(0)=\varepsilon \bar{k}_n=\varepsilon \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n,$$

also $|\gamma_0|<1$. Ferner ist

$$f_1=\frac{1}{x}\frac{f-\gamma_0}{1-\bar{\gamma}_0 f}=\frac{\varepsilon}{x}\frac{x^n \bar{P}(x^{-1})-\bar{k}_n P(x)}{P(x)-k_n x^n \bar{P}(x^{-1})}=\varepsilon \frac{x^{n-1}\bar{Q}(x^{-1})}{Q(x)},$$

wobei

$$Q(x)=\frac{P(x)-k_n x^n \bar{P}(x^{-1})}{1-\bar{k}_n k_n}=1+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{k_\nu-k_n \bar{k}_{n-\nu}}{1-\bar{k}_n k_n}x^\nu$$

zu setzen ist. Dieses Polynom ist höchstens vom Grade $n-1$ und kann für $|x|\leqq 1$ nicht verschwinden, weil für ein solches x

$$|x^n \bar{P}(x^{-1})| \leqq |P(x)|, \text{ also } |k_n x^n \bar{P}(x^{-1})|<|P(x)|$$

ist. Die Funktion $f_1(x)$ hat also dieselbe Form wie $f(x)$, wobei aber an Stelle von n die Zahl $n-1$ tritt. Nimmt man daher das zu Beweisende für $n-1$ als richtig an, so erhält $f_1(x)$ die Form

*) Im folgenden bezeichne ich stets, wenn $P(x)$ ein Polynom ist, mit $\bar{P}(x)$ das Polynom mit den konjugiert komplexen Koeffizienten.

$$f_1(x) = [x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n], \quad (|\gamma_1| < 1, \ldots, |\gamma_{n-1}| < 1, |\gamma_n| = 1)$$

und mithin läßt $f(x)$ die Darstellung (7.) zu. Die Zahl γ_n wird hierbei gleich ε.

Weiß man umgekehrt, daß $f(x)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{E}$ ist, deren Parameter den Bedingungen (5.) genügen, so wird

$$f_n(x) = \gamma_n = \varepsilon \frac{x^0}{1}, \quad |\varepsilon| = |\gamma_n| = 1.$$

Es sei schon bewiesen, daß $f_{\nu+1}(x)$ die Form

$$f_{\nu+1}(x) = \gamma_n \frac{x^{n-\nu-1}\, \overline{R}(x^{-1})}{R(x)}$$

hat, wo $R(x)$ ein Polynom höchstens vom Grade $n-\nu-1$ bedeutet, das für $x=0$ den Wert 1 hat und entweder gleich 1 ist oder nur außerhalb des Einheitskreises verschwindet. Dann wird

$$f_\nu = \frac{\gamma_\nu + x f_{\nu+1}}{1 + \overline{\gamma}_\nu x f_{\nu+1}} = \gamma_n \frac{x^{n-\nu}\, \overline{S}(x^{-1})}{S(x)},$$

wobei

$$S(x) = R(x) + \overline{\gamma}_\nu \gamma_n x^{n-\nu} \overline{R}(x^{-1})$$

zu setzen ist. Dieses Polynom ist höchstens vom Grade $n-\nu$ und genügt der Bedingung $S(0)=1$. Man schließt ferner ähnlich wie vorhin, daß $S(x)$ für $|x| \leqq 1$ nicht verschwinden kann. Was für $\nu+1$ gilt, ist also auch für ν richtig. Für $\nu=0$ ergibt sich, daß $f(x)$ die Form (6′.) haben muß.

Eine Funktion von dieser Form kann man auch einfach charakterisieren als eine im Kreise $|x| \leqq 1$ reguläre rationale Funktion mit n (gleichen oder verschiedenen) Nullstellen, deren absoluter Betrag für $|x|=1$ beständig gleich 1 ist*).

§ 2.
Die Funktionen Φ und Ψ.

Wir gehen wieder von einer Potenzreihe (2.) aus, fassen jetzt aber die Koeffizienten c_ν als beliebige komplexe Variable auf. Mit Hilfe der Formeln (4.) lassen sich dann die Ausdrücke f_ν als Quotienten von Potenzreihen berechnen, die formal in der Form

$$f_\nu(x) = c_{\nu 0} + c_{\nu 1} x + c_{\nu 2} x^2 + \cdots \qquad (c_{0\lambda} = c_\lambda)$$

entwickelbar sind. Hierbei wird offenbar $c_{\nu\lambda}$ eine wohlbestimmte rationale Funktion von

$$c_0, \bar{c}_0, c_1, \bar{c}_1, \ldots, c_{\nu-1}, \bar{c}_{\nu-1}, c_\nu, c_{\nu+1}, \ldots, c_{\nu+\lambda}.$$

Insbesondere setze ich

$$\gamma_\nu = c_{\nu 0} = \Phi(c_0, c_1, \ldots, c_\nu) = \Phi_\nu.$$

*) Vergl. *T. H. Gronwall*, Annals of Math. Bd. 14 (1912), S. 72.

Diese Ausdrücke werden später genauer bestimmt werden. Speziell ist

$$\Phi_0 = c_0, \qquad \Phi_1 = \frac{c_1}{1-\bar{c}_0 c_0}, \qquad \Phi_2 = \frac{c_2(1-\bar{c}_0 c_0)+\bar{c}_0 c_1^2}{(1-\bar{c}_0 c_0)^2-\bar{c}_1 c_1}.$$

Für numerisch gegebene Koeffizienten c_ν ist, wie man leicht erkennt, der Nenner von Φ_ν von Null verschieden, wenn keine der Zahlen $|\gamma_0|, |\gamma_1|, \ldots, |\gamma_{\nu-1}|$ gleich 1 ist.

Umgekehrt ist

$$c_\nu = \Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) = \Psi_\nu$$

eine wohlbestimmte *ganze* rationale Funktion von

$$\gamma_0, \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \bar{\gamma}_1, \ldots, \gamma_{\nu-1}, \bar{\gamma}_{\nu-1}, \gamma_\nu.$$

Insbesondere wird

$$\Psi_0 = \gamma_0, \ \Psi_1 = \gamma_1(1-\bar{\gamma}_0\gamma_0), \ \Psi_2 = \gamma_2(1-\bar{\gamma}_0\gamma_0)(1-\bar{\gamma}_1\gamma_1) - \bar{\gamma}_0\gamma_1^2(1-\bar{\gamma}_0\gamma_0).$$

Um die Ausdrücke Ψ_ν allgemein zu berechnen, beachte man, daß beim Übergang von f zu f_1 an Stelle von $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ die Größen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ treten. Daher ist $c_{1\nu} = \Psi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\nu+1})$. Aus

$$f(1+\bar{\gamma}_0 x f_1) = \gamma_0 + x f_1$$

ergibt sich nun durch Vergleichen der Koeffizienten die Rekursionsformel

$$\Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) = (1-\bar{\gamma}_0\gamma_0)\Psi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu) - \bar{\gamma}_0 \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\lambda)\Psi(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\nu-\lambda}).$$

Hieraus schließt man leicht, daß

$$\Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) = \gamma_\nu \prod_{\lambda=0}^{\nu-1}(1-\bar{\gamma}_\lambda\gamma_\lambda) + \Psi'$$

ist, wo Ψ' nur noch von $\gamma_0, \bar{\gamma}_0, \ldots, \gamma_{\nu-1}, \bar{\gamma}_{\nu-1}$ abhängt. Setzt man ferner γ_λ *gleich einer Größe vom absoluten Betrage* 1, *so hängt* Ψ_ν *von* $\gamma_{\lambda+1}, \bar{\gamma}_{\lambda+1}, \ldots, \gamma_\nu$ *nicht mehr ab.* In diesem Fall ist Ψ_ν nichts anderes als der Koeffizient von x^ν in der Entwicklung von $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\lambda]$ nach Potenzen von x.

Allgemein können die rationalen Funktionen

$$\varphi_\nu(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu] \tag{8.}$$

für beliebige Werte der Parameter γ_λ gebildet werden. Sie sind mit Hilfe der Rekursionsformel

$$[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu] = \frac{\gamma_0 + x[x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu]}{1+\bar{\gamma}_0 x[x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu]}, \quad [x; \gamma_\nu] = \gamma_\nu \tag{9.}$$

zu berechnen. Ist $|\gamma_\lambda| = 1$, so wird für $\nu > \lambda$

$$[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu] = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\lambda].$$

Dasselbe gilt bei beliebigem γ_λ, wenn $\gamma_{\lambda+1} = \gamma_{\lambda+2} = \cdots = \gamma_\nu = 0$ ist. In jedem Fall ist, wenn

$$\gamma_0' = \gamma_0, \quad \gamma_1' = \gamma_1, \quad \ldots, \gamma_\nu' = \gamma_\nu, \quad \gamma_{\nu+1}' = \gamma_{\nu+2}' = \cdots = 0$$

gesetzt wird, für genügend kleine Werte von $|x|$

$$[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu] = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \Psi(\gamma_0', \gamma_1', \ldots, \gamma_\lambda') x^\lambda.$$

Aus (9.) ergibt sich durch den Schluß von $\nu - 1$ auf ν, daß die Funktion $\varphi_\nu(x)$ sich dann und nur dann im Einheitskreis regulär verhält und der Bedingung $M(\varphi_\nu) \leqq 1$ genügt, wenn die Zahlen $|\gamma_0|, |\gamma_1|, \ldots, |\gamma_\nu|$ entweder sämtlich kleiner als 1 sind, oder wenn die erste unter ihnen, die nicht kleiner als 1 ist, genau gleich 1 wird. Ist insbesondere $|\gamma_\lambda| < 1$ für jeden Wert von λ, so wird $M(\varphi_\nu) < 1$. Dies folgt daraus, daß die zu φ_ν adjungierte Funktion $[x; \gamma_\nu] = \gamma_\nu$ dieser Bedingung genügt.

§ 3.

Kriterien für die Koeffizienten einer beschränkten Potenzreihe.

Ich beweise zunächst folgenden Satz

I. *Sind $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ beliebige Größen, die sämtlich absolut kleiner als 1 sind, so ist die Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu,$$

die ich auch kürzer mit $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots]$ bezeichne, für $|x| < 1$ konvergent, und ihre obere Grenze $M(f)$ ist höchstens gleich 1. Ferner ist für $|x| < 1$

$$[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots] = \lim_{\nu=\infty} [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu],$$

und die Konvergenz ist in jedem Kreise $|x| \leqq r < 1$ eine gleichmäßige.

Versteht man nämlich unter $\varphi_\nu(x)$ den mit Hilfe der gegebenen Zahlen γ_λ gebildeten Ausdruck (8.), so gehört diese rationale Funktion für jedes ν zur Funktionenklasse $\mathfrak{E}$. Ist daher

$$\varphi_\nu(x) = d_{\nu 0} + d_{\nu 1} x + d_{\nu 2} x^2 + \cdots,$$

so wird $|d_{\nu\lambda}| \leqq M(\varphi_\nu) < 1$. Speziell ist aber nach dem Früheren für $\lambda \leqq \nu$

$$d_{\nu\lambda} = \Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\lambda) = c_\lambda.$$

Folglich ist $|c_\lambda| < 1$ für jeden Wert von λ und daher ist die Potenzreihe $f(x)$ für $|x| < 1$ konvergent. Ferner ist für jede positive Zahl $r < 1$ und für $|x| \leqq r$

$$|f - \varphi_\nu| = \left| \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} (c_\lambda - d_{\nu\lambda}) x^\lambda \right| \leqq \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} (|c_\lambda| + |d_{\nu\lambda}|) r^\lambda < \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} 2 r^\lambda = \frac{2 r^{\nu+1}}{1 - r}.$$

Da der rechts stehende Ausdruck mit wachsendem ν gegen 0 konvergiert, so konvergieren die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ für $|x| \leqq r$ gleichmäßig gegen $f(x)$. Für jede Stelle x im Innern des Einheitskreises folgt ferner aus $f(x) = \lim \varphi_\nu(x)$

und $|\varphi_\nu(x)| < 1$, daß auch $|f(x)| \leqq 1$ ist.

In Verbindung mit den Ergebnissen der §§ 1 und 2 ergibt sich hieraus:

II. *Die Potenzreihe*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

ist dann und nur dann für $|x| < 1$ *konvergent und dem absoluten Betrage nach höchstens gleich* 1, *wenn die zugehörigen Ausdrücke*

$$\gamma_\nu = \Phi(c_0, c_1, \ldots, c_\nu)$$

entweder sämtlich absolut kleiner als 1 *sind, oder wenn eine Zahl* n *existiert, für die*

$$|\gamma_0| < 1, \quad |\gamma_1| < 1, \ldots, \quad |\gamma_{n-1}| < 1, \quad |\gamma_n| = 1$$

wird und die n*-te zu* $f(x)$ *adjungierte Funktion*

$$f_n(x) = c_{n0} + c_{n1} x + c_{n2} x^2 + \cdots$$

sich auf das konstante Glied $c_{n0} = \gamma_n$ *reduziert. Im ersten Fall wird*

$$f(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots] = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) x^\nu.$$

Der zweite Fall tritt dann und nur dann ein, wenn $f(x)$ *eine rationale Funktion von der Form* (6.) *ist, und es wird* $f(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$.

Im folgenden unterscheide ich diese beiden Fälle voneinander, indem ich $f(x)$ als *eine Funktion von unendlichem Range,* bezw. *vom endlichen Range* n bezeichne.

Es gilt ferner der Satz:

III. *Sind* $c_0, c_1, \ldots, c_m$ *gegebene Größen, so läßt sich dann und nur dann eine Potenzreihe der Form*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m + c_{m+1} x^{m+1} + \cdots$$

angeben, die für $|x| < 1$ *konvergiert und der Bedingung* $M(f) \leqq 1$ *genügt, wenn die Ausdrücke*

$$\gamma_\mu = \Phi(c_0, c_1, \ldots, c_\mu) \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m)$$

entweder sämtlich absolut kleiner als 1 *sind, oder wenn eine Zahl* $n \leqq m$ *existiert derart, daß*

$$|\gamma_0| < 1, \quad |\gamma_1| < 1, \ldots, \quad |\gamma_{n-1}| < 1, \quad |\gamma_n| = 1$$

wird und c_μ *für* $\mu = n+1, n+2, \ldots, m$ *mit dem Koeffizienten von* x^μ *in der Entwicklung der rationalen Funktion* $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ *nach Potenzen von* x *übereinstimmt.*

Daß die hier genannten Bedingungen notwendig erfüllt sein müssen, ergibt sich aus dem Früheren. Sie sind aber auch hinreichend. Im ersten Fall gibt es unendlich viele Funktionen der verlangten Art, nämlich alle Funktionen der Form

$$f(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m, \gamma_{m+1}, \ldots],$$

wo $\gamma_{m+1}, \gamma_{m+2}, \ldots$ beliebige Größen bedeuten können, deren absolute Beträge höchstens gleich 1 sind. Im zweiten Fall liefert aber $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ die einzige Lösung des Problems (vergl. *Carathéodory* und *Fejér*, a. a. O. S. 234).

Die bisherigen Ergebnisse lassen auch folgende Deutung zu:

IV. *Um die Gesamtheit aller Funktionen der Klasse* $\mathfrak{E}$ *zu erhalten, hat man nur die Potenzreihen*

$$f(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots] = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) x^\nu$$

für alle Größen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$, *deren absolute Beträge höchstens gleich* 1 *sind, aufzustellen. Jede Funktion* $f(x)$ *von unendlichem Range wird hierbei nur einmal erhalten, und zwar sind* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ *eindeutig bestimmt als die zu* $f(x)$ *gehörenden Parameter. Für eine Funktion* $f(x)$ *vom endlichen Range* n, *d. h. für eine Funktion der Form* (6.) *sind nur* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *eindeutig bestimmt als die Parameter von* $f(x)$, *die Größen* $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots$ *können dagegen beliebig gewählt werden.*

§ 4.
Berechnung der Ausdrücke Φ_ν.

Um das durch den Satz II gelieferte Kriterium für die Beschränktheit einer gegebenen Potenzreihe (mit vorgeschriebener oberer Schranke) auf eine elegantere Form zu bringen, hat man nur die Ausdrücke $\gamma_\nu = \Phi(c_0, c_1, \ldots, c_\nu)$ genauer zu berechnen. Es empfiehlt sich hierbei, nicht von einer Potenzreihe, sondern von einem Quotienten zweier Potenzreihen auszugehen. Es sei also

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots}.$$

Der Koeffizient b_0 soll hierbei von Null verschieden sein und kann als reell angenommen werden. Der Quotient $f(x)$ kann dann formal nach Potenzen von x entwickelt werden, es sei

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots.$$

Setzt man nun

$$g_\nu(x) = a_\nu + a_{\nu+1} x + \cdots, \quad h(x) = b_\nu + b_{\nu+1} x + \cdots, \quad (g_0 = g,\ h_0 = h)$$

so wird $\gamma_0 = f(0) = \dfrac{a_0}{b_0}$ und

$$f_1 = \frac{1}{x} \frac{f - \gamma_0}{1 - \bar{\gamma}_0 f} = \frac{b_0 g_1 - a_0 h_1}{\bar{b}_0 h - \bar{a}_0 g} = -\frac{D_1(x)}{\Delta_1(x)},$$

wobei

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_0 & g_1 \\ b_0 & h_1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \bar{b}_0 & g_0 \\ \bar{a}_0 & h_0 \end{vmatrix}$$

wird. Versteht man nun unter d_1 und δ_1 die Größen

$$d_1 = D_1(0) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}, \qquad \delta_1 = \Delta_1(0) = \begin{vmatrix} \bar{b}_0 & a_0 \\ \bar{a}_0 & b_0 \end{vmatrix},$$

so wird, wenn $\delta_1 \neq 0$ ist, $\gamma_1 = f_1(0) = -\frac{d_1}{\delta_1}$ und

$$f_2 = \frac{1}{x}\frac{f_1 - \gamma_1}{1 - \bar{\gamma}_1 f_1} = \frac{1}{x}\frac{d_1\Delta_1 - \delta_1 D_1}{\delta_1\Delta_1 - \bar{d}_1 D_1} = -\frac{D_2(x)}{\Delta_2(x)}.$$

Hierbei können $D_2(x)$ und $\Delta_2(x)$ in der Form

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_1 & g_2 \\ \bar{b}_0 & 0 & a_0 & g_1 \\ 0 & b_0 & b_1 & h_2 \\ a_0 & 0 & b_0 & h_1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \bar{b}_0 & 0 & a_0 & g_1 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_0 & 0 & g_0 \\ \bar{a}_0 & 0 & b_0 & h_1 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & 0 & h_0 \end{vmatrix}$$

geschrieben werden. Allgemein gilt der Satz:

V. *Man verstehe unter $D_\nu(x)$ und $\Delta_\nu(x)$ die Determinanten des Grades 2ν*

$$D_\nu = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{\nu-1} & g_\nu \\ \bar{b}_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{\nu-2} & g_{\nu-1} \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{\nu-3} & g_{\nu-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{b}_{\nu-2} & b_{\nu-3} & \dots & \bar{b}_0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & g_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{\nu-1} & h_\nu \\ \bar{a}_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{\nu-2} & h_{\nu-1} \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{\nu-3} & h_{\nu-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{\nu-2} & \bar{a}_{\nu-3} & \dots & \bar{a}_0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & h_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_\nu = \begin{vmatrix} \bar{b}_0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{\nu-2} & g_{\nu-1} \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_0 & \dots & 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{\nu-3} & g_{\nu-2} \\ \bar{b}_2 & \bar{b}_0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{\nu-4} & g_{\nu-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{b}_{\nu-1} & \bar{b}_{\nu-2} & \dots & \bar{b}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & g_0 \\ \bar{a}_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{\nu-2} & h_{\nu-1} \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & \dots & 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{\nu-3} & h_{\nu-2} \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{\nu-4} & h_{\nu-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{\nu-1} & \bar{a}_{\nu-2} & \dots & \bar{a}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_0 \end{vmatrix}.$$

Ferner sei $d_\nu = D_\nu(0)$, $\delta_\nu = \Delta_\nu(0)$. Ist keine der (sämtlich reellen) Zahlen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{\nu-1}$ gleich 0, so wird

$$f_\nu = \frac{1}{x}\frac{f_{\nu-1} - \gamma_{\nu-1}}{1 - \bar{\gamma}_{\nu-1} f_{\nu-1}} = -\frac{D_\nu(x)}{\Delta_\nu(x)}, \qquad \gamma_{\nu-1} = f_{\nu-1}(0) = -\frac{d_{\nu-1}}{\delta_{\nu-1}}.$$

Um dieses Bildungsgesetz zu beweisen, haben wir, wie man leicht sieht, nur zu zeigen, daß

(10.) $$d_\nu\Delta_\nu - \delta_\nu D_\nu = -\delta_{\nu-1} x D_{\nu+1},$$

(11.) $$\delta_\nu\Delta_\nu - \bar{d}_\nu D_\nu = \delta_{\nu-1}\Delta_{\nu+1}$$

ist. Der Beweis beruht auf dem bekannten Determinantensatz: Ist D eine

Determinante beliebigen Grades und bedeutet $D^{\alpha,\alpha';\beta,\beta';\dots}$ diejenige Unterdeterminante, die entsteht, wenn man in D die Zeilen $\alpha, \beta, \dots$ und die Kolonnen $\alpha', \beta', \dots$ streicht, so ist für $\alpha < \beta$, $\alpha' < \beta'$

$$D^{\alpha,\alpha'} D^{\beta,\beta'} - D^{\alpha,\beta'} D^{\beta,\alpha'} = D.D^{\alpha,\alpha';\beta,\beta'}.$$

Für die Determinanten $D_{\nu+1}$ und $\Delta_{\nu+1}$ ergibt sich ohne Mühe

$$D_{\nu+1}^{1,2\nu+1} = \frac{b_0}{x}(\Delta_\nu - \delta_\nu), \qquad D_{\nu+1}^{\nu+1,2\nu+1} = (-1)^\nu \frac{\bar{a}_0}{x}(D_\nu - d_\nu),$$

$$D_{\nu+1}^{1,2\nu+2} = b_0 \delta_\nu, \qquad D_{\nu+1}^{\nu+1,2\nu+2} = (-1)^\nu \bar{a}_0 d_\nu, \qquad D_{\nu+1}^{1,2\nu+1;\nu+1,2\nu+2} = (-1)^{\nu-1} b_0 \bar{a}_0 \delta_{\nu-1}$$

und

$$\Delta_{\nu+1}^{1,1} = b_0 \Delta_\nu, \qquad \Delta_{\nu+1}^{2\nu+2,1} = -\bar{b}_0 D_\nu,$$

$$\Delta_{\nu+1}^{1,2\nu+2} = -b_0 \bar{d}_\nu, \qquad \Delta_{\nu+1}^{2\nu+2,2\nu+2} = \bar{b}_0 \delta_\nu, \qquad \Delta_{\nu+1}^{1,1;2\nu+2,2\nu+2} = b_0 \bar{b}_0 \delta_{\nu-1}.$$

Die zu beweisenden Relationen (10.) und (11.) besagen nur, daß

$$D_{\nu+1}^{1,2\nu+1} D_{\nu+1}^{\nu+1,2\nu+2} - D_{\nu+1}^{1,2\nu+2} D_{\nu+1}^{\nu+1,2\nu+1} = D_{\nu+1} D_{\nu+1}^{1,2\nu+1;\nu+1,2\nu+2}\ *),$$

$$\Delta_{\nu+1}^{1,1} \Delta_{\nu+1}^{2\nu+2,2\nu+2} - \Delta_{\nu+1}^{1,2\nu+2} \Delta_{\nu+1}^{2\nu+2,1} = \Delta_{\nu+1} \Delta_{\nu+1}^{1,1;2\nu+2,2\nu+2}$$

ist.

Aus (11.) ergibt sich für $x = 0$ die für das Folgende wichtige Formel

$$(12.) \qquad 1 - |\gamma_\nu|^2 = \frac{\delta_{\nu-1}\delta_{\nu+1}}{\delta_\nu^2} \qquad \left(\delta_0 = 1,\ \delta_{-1} = \frac{1}{b_0^2}\right).$$

Ist also δ_{n+1} die erste der Zahlen δ_ν, die den Wert 0 hat, so wird γ_n die erste unter den Zahlen γ_ν, deren absoluter Betrag gleich 1 ist. In diesem Fall haben wir auf Grund der früheren Festsetzungen den Quotienten f_{n+1} nicht mehr zu betrachten. Dies ist im folgenden stets zu berücksichtigen.

§ 5.

Die zu einem Quotienten von zwei Potenzreihen gehörenden Hermiteschen Formen.

Die Determinanten δ_ν lassen sich in einfacher Weise deuten, wenn man von den Bezeichnungen des Matrizenkalküls Gebrauch macht.

Der Potenzreihe $g(x) = \Sigma a_\nu x^\nu$ ordnen wir die unendlichen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}, \qquad \bar{A}' = \begin{pmatrix} \bar{a}_0 & 0 & 0 & \dots \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & 0 & \dots \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}$$

zu, denen die formal gebildeten Bilinearformen

---

*) Streng genommen folgt (10.) aus dieser Gleichung zunächst nur für $a_0 \neq 0$. Die Formel (10.) vertritt aber nur ein System von algebraischen Identitäten zwischen den $a_\lambda, \bar{a}_\lambda, b_\lambda, \bar{b}_\lambda$, gelten diese für $a_0 \neq 0$, so sind sie auch für $a_0 = 0$ richtig.

$$A(x,y)=\sum_{\lambda\geq x}^{\infty}{}_0\, a_{\lambda-x}x_x y_\lambda, \qquad \bar{A}'(x,y)=\sum_{\lambda\geq x}^{\infty}{}_0\, \bar{a}_{x-\lambda}x_x y_\lambda$$

entsprechen. Die ν-ten „Abschnitte" von A und $\bar{A}'$ sind die Matrizen des Grades $\nu+1$

$$A_\nu=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_\nu \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{\nu-1} \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{\nu-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{A}'_\nu=\begin{pmatrix} \bar{a}_0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & 0 & \dots 0 \\ \bar{a}_2 & \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_\nu & \bar{a}_{\nu-1} & \bar{a}_{\nu-2} & \dots \bar{a}_0 \end{pmatrix}$$

und $\bar{A}'_\nu A_\nu$ läßt sich deuten als die Koeffizientenmatrix der *Hermite*schen Form

$$\mathfrak{A}_\nu=\mathfrak{A}(x_0,x_1,\dots,x_\nu)=\sum_{\lambda=0}^{\nu}\left|a_0x_\lambda+a_1x_{\lambda+1}+\dots+a_{\nu-\lambda}x_\nu\right|^2.$$

Auch die unendliche Matrix $\bar{A}'A$ kann in jedem Falle gebildet werden. Ihre Koeffizienten sind endliche Summen und $\bar{A}'_\nu A_\nu$ ist nichts anderes als der ν-te Abschnitt von $\bar{A}'A$.

Definieren wir in derselben Weise für die Potenzreihe $h(x)=\Sigma b_\nu x^\nu$ die Matrizen $B, B_\nu, \bar{B}', \bar{B}'_\nu$ und die *Hermite*sche Form $\mathfrak{B}_\nu$, so ist A mit B und also A_ν mit B_ν vertauschbar. Dies folgt einfach daraus, daß AB als die zur Potenzreihe

$$g(x)\,h(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\dots$$

gehörende Matrix charakterisiert werden kann*). Daher ist auch $\bar{A}'_\nu$ mit $\bar{B}'_\nu$ vertauschbar.

Die im vorigen Paragraphen eingeführte Determinante $\delta_{\nu+1}$ kann nun zunächst in der Form

$$\delta_{\nu+1}=\begin{vmatrix} \bar{B}'_\nu, A_\nu \\ \bar{A}'_\nu, B_\nu \end{vmatrix}$$

geschrieben werden. Ich behaupte aber, *daß $\delta_{\nu+1}$ auch als die Determinante der Matrix $\bar{B}'_\nu B_\nu-\bar{A}'_\nu A_\nu$, d. h. als die Koeffizientendeterminante der Hermiteschen Form*

(13.) $$\mathfrak{H}_\nu=\mathfrak{H}(x_0,x_1,\dots,x_\nu)=\mathfrak{B}_\nu-\mathfrak{A}_\nu$$
$$=\sum_{\lambda=0}^{\nu}\left(\left|b_0x_\lambda+\dots+b_{\nu-\lambda}x_\nu\right|^2-\left|a_0x_\lambda+\dots+a_{\nu-\lambda}x_\nu\right|^2\right)$$

aufgefaßt werden kann.

Dies folgt unmittelbar aus einem einfachen Hilfssatz:

Sind P, Q, R, S vier Matrizen desselben Grades n und ist P mit R vertauschbar, so ist die Determinante $|M|$ der Matrix

*) Vergl. *O. Toeplitz*, Math. Ann. Bd. 70, S. 356.

$$M = \begin{pmatrix} P, & Q \\ R, & S \end{pmatrix}$$

des Grades $2n$ gleich der Determinante der Matrix $PS - RQ$.

Ist nämlich die Determinante von P nicht Null, so wird, wenn E die Einheitsmatrix des Grades n bedeutet,

$$\begin{pmatrix} P^{-1}, & 0 \\ -RP^{-1}, & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P, & Q \\ R, & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E, & P^{-1}Q \\ 0, & S - RP^{-1}Q \end{pmatrix}.$$

Geht man zu den Determinanten über, so erhält man

$$|P^{-1}| \cdot |M| = |S - RP^{-1}Q|,$$

also

$$|M| = |P| \cdot |S - RP^{-1}Q| = |PS - PRP^{-1}Q| = |PS - RQ|.$$

Ist aber $|P| = 0$, so betrachte man an Stelle von M die Matrix

$$M_1 = \begin{pmatrix} P + xE, & Q \\ R, & S \end{pmatrix}.$$

Auch hier ist noch R mit $P + xE$ vertauschbar. Für genügend kleine Werte von $|x|$ ist aber die Determinante von $P + xE$ von 0 verschieden, also wird

$$|M_1| = |(P + xE)S - RQ|.$$

Läßt man x gegen 0 konvergieren, so erhält man wieder die zu beweisende Gleichung.

Dem früher betrachteten Quotienten $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ entspricht also das unendliche System der *Hermite*schen Formen (13.) mit den Determinanten $\delta_{\nu+1}$. Ebenso gehört zu dem Quotienten

$$f_\lambda(x) = -\frac{D_\lambda(x)}{\Delta_\lambda(x)}$$

ein wohlbestimmtes System von *Hermite*schen Formen

$$\mathfrak{H}_\nu^{(\lambda)} = \mathfrak{H}^{(\lambda)}(x_0, x_1, \ldots, x_\nu). \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Die Determinante von $\mathfrak{H}_\nu^{(\lambda)}$ möge mit $\delta_{\nu+1}^{(\lambda)}$ bezeichnet werden. Insbesondere ist

$$\mathfrak{H}_\nu^{(1)} = \sum_{\lambda=0}^{\nu} |(\bar{b}_0 b_0 - \bar{a}_0 a_0) x_\lambda + \cdots + (\bar{b}_0 b_{\nu-\lambda} - \bar{a}_0 a_{\nu-\lambda}) x_\nu|^2$$

$$- \sum_{\lambda=0}^{\nu} |(b_0 a_1 - a_0 b_1) x_\lambda + \cdots + (b_0 a_{\nu-\lambda+1} - a_0 b_{\nu-\lambda+1}) x_\nu|^2.$$

Eine einfache Rechnung liefert nun die wichtige Formel

(14.) $\quad \delta_1 \mathfrak{H}(x_0, x_1, \ldots, x_\nu)$

$$= |\bar{b}_0(b_0 x_0 + \cdots + b_\nu x_\nu) - \bar{a}_0(a_0 x_0 + \cdots + a_\nu x_\nu)|^2 + \mathfrak{H}^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_\nu).$$

Der Übergang von $\mathfrak{H}(x_0, x_1, \ldots, x_\nu)$ zu $\mathfrak{H}^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ entspricht also dem

ersten Schritt bei der Jacobischen Transformation der Form $\mathfrak{H}(x_0, x_1, \ldots, x_\nu)$. Auf Grund einer bekannten Eigenschaft der *Jacobi*schen Transformation ergibt sich hieraus, daß die Determinante von $\mathfrak{H}^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ gleich $\delta_1^{\nu-1}\delta_{\nu+1}$ ist. Folglich ist

$$\delta_{\nu+1}^{(1)} = \delta_1^{\nu}\delta_{\nu+2}. \tag{15.}$$

Hieraus können wir aber leicht schließen, daß allgemein

$$\delta_{\nu+1}^{(\lambda)} = \delta_{\lambda-1}^{\nu+1}\delta_\lambda^\nu\delta_{\nu+\lambda+1} \tag{16.}$$

wird. Geht man nämlich von $f_\lambda = -\frac{D_\lambda}{\Delta_\lambda}$ zu $f_{\lambda+1}$ in derselben Weise über wie von f zu f_1, so erhält man $f_{\lambda+1}$ zunächst (vergl. (10.) und (11.)) als den Ausdruck

$$f_{\lambda+1} = -\frac{\delta_{\lambda-1}D_{\lambda+1}}{\delta_{\lambda-1}\Delta_{\lambda+1}},$$

dem die *Hermite*schen Formen $\delta_{\lambda-1}^2\mathfrak{H}_\nu^{(\lambda+1)}$ entsprechen. Nimmt man daher die Formel (16.) für λ als bewiesen an, so ergibt sich wegen (15.), daß die Determinante von $\delta_{\lambda-1}^2\mathfrak{H}_\nu^{(\lambda+1)}$ gleich

$$(\delta_{\lambda-1}\delta_{\lambda+1})^\nu\delta_{\lambda-1}^{\nu+2}\delta_\lambda^{\nu+1}\delta_{\nu+\lambda+2}$$

ist. Um hieraus $\delta_{\nu+1}^{(\lambda+1)}$ zu erhalten, hat man durch $\delta_{\lambda-1}^{2(\nu+1)}$ zu dividieren; man erhält dann, wie zu beweisen ist, $\delta_{\nu+1}^{(\lambda+1)} = \delta_\lambda^{\nu+1}\delta_{\lambda+1}^\nu\delta_{\nu+\lambda+2}$.

Wir können nun leicht beweisen:

VI. *Sind unter den Zahlen* $\delta_1, \delta_2, \ldots$ *die* n *ersten von Null verschieden, die folgenden sämtlich gleich Null, so reduziert sich der Quotient* $f_n(x)$ *auf eine Konstante* ε *vom absoluten Betrage* 1, *d. h. die Potenzreihen* $-D_n(x)$ *und* $\varepsilon\Delta_n(x)$ *stimmen in allen Koeffizienten überein. Sind umgekehrt* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ *von Null verschieden und reduziert sich* $f_n(x)$ *auf eine Konstante* ε *vom absoluten Betrage* 1, *so sind die Zahlen* $\delta_{n+1}, \delta_{n+2}, \ldots$ *sämtlich gleich Null.*

Auf Grund der Formel (16.) genügt es offenbar, diesen Satz nur für den Fall $n = 0$ zu beweisen. Wir haben also zu zeigen: dann und nur dann unterscheiden sich die Koeffizienten a_ν und b_ν voneinander nur um einen konstanten Faktor vom absoluten Betrage 1, wenn alle Determinanten $\delta_1, \delta_2, \ldots$ verschwinden. Ist zunächst $a_\nu = \varepsilon b_\nu$ für jedes ν und $|\varepsilon| = 1$, so wird für jeden Wert von ν die Form $\mathfrak{H}_\nu$ identisch gleich 0, daher ist gewiß $\delta_\nu = 0$. Sind umgekehrt alle δ_ν gleich 0, so folgt zunächst aus $\delta_1 = \bar{b}_0 b_0 - \bar{a}_0 a_0 = 0$, daß $\frac{a_0}{b_0} = \varepsilon$ vom absoluten Betrage 1 ist. Ich setze

$$u_\nu = a_\nu - \varepsilon b_\nu, \qquad U_\nu = A_\nu - \varepsilon B_\nu,$$

so daß also

$$\bar{b}_\nu - \varepsilon \bar{a}_\nu = -\varepsilon \bar{u}_\nu, \qquad \bar{B}'_\nu - \varepsilon \bar{A}'_\nu = -\varepsilon \bar{U}'_\nu$$

wird. Es sei schon bewiesen, daß die Differenzen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ sämtlich verschwinden. Daß nun auch $u_n = 0$ ist, ergibt sich aus dem Verschwinden der Determinante

$$\delta_{2n} = \begin{vmatrix} \bar{B}'_{2n-1}, A_{2n-1} \\ \bar{A}'_{2n-1}, B_{2n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\varepsilon \bar{U}'_{2n-1}, U_{2n-1} \\ \bar{A}'_{2n-1}, B_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante des Grades $4n$ läßt sich nämlich in der Form

$$\delta_{2n} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & X \\ -\varepsilon \bar{X}' & 0 & 0 & 0 \\ \bar{A}'_{n-1} & 0 & B_{n-1} & Y \\ Z & \bar{A}'_{n-1} & 0 & B_{n-1} \end{vmatrix}$$

schreiben, wo

$$X = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} & \ldots & u_{2n-1} \\ 0 & u_n & \ldots & u_{2n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & u_n \end{pmatrix}$$

ist und Y, Z gewisse andere Matrizen n-ten Grades bedeuten. Daher ist

$$\delta_{2n} = |-\varepsilon \bar{X}' X B_{n-1} \bar{A}'_{n-1}| = (-\varepsilon)^n |u_n|^{2n} b_0^n \bar{a}_0^n = (-1)^n |b_0 u_n|^{2n},$$

was nur dann verschwinden kann, wenn $u_n = a_n - \varepsilon b_n = 0$ ist.

Genauer erkennt man in ähnlicher Weise: *sind die m ersten der Determinanten δ_ν gleich 0 und ist m eine gerade Zahl, so ist auch die Zahl δ_{m+1} gleich Null.*

Die durch (13.) definierte *Hermite*sche Form $\mathfrak{H}_\nu$ kann aufgefaßt werden als der ν-te Abschnitt der *Hermite*schen Form

$$\mathfrak{H} = \bar{B}' B - \bar{A}' A = \sum_{\varkappa, \lambda}^{0, \infty} h_{\varkappa\lambda} \bar{x}_\varkappa x_\lambda \text{*)}$$

mit unendlich vielen Veränderlichen. Hierbei ist, wenn μ die kleinere der beiden Zahlen $\varkappa$ und λ bedeutet,

$$h_{\varkappa\lambda} = \sum_{\varrho=0}^{\mu} (\bar{b}_{\varkappa-\varrho} b_{\lambda-\varrho} - \bar{a}_{\varkappa-\varrho} a_{\lambda-\varrho})$$

zu setzen. Die Zahlen $\delta_1, \delta_2, \ldots$ sind also die Abschnittsdeterminanten von $\mathfrak{H}$. Die Form $\mathfrak{H}$ nenne ich, wie üblich, *nichtnegativ*, wenn jede der

*) Die Summe ist als eine rein formale Bildung anzusehen, sie braucht keineswegs zu konvergieren.

Formen $\mathfrak{H}_\nu$ mit endlich vielen Veränderlichen nichtnegativ ist, und deute dies kurz durch $\mathfrak{H} \geqq 0$ an. Es gilt nun der Satz:

VII. *Die Hermitesche Form $\mathfrak{H}$ ist dann und nur dann nichtnegativ, wenn die Determinanten $\delta_1, \delta_2, \ldots$ entweder sämtlich positiv (>0) sind, oder wenn*

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \ldots, \delta_n > 0, \delta_{n+1} = \delta_{n+2} = \cdots = 0$$

wird. Im zweiten Fall ist n gleich dem Range r der unendlichen Matrix $\mathfrak{H} = (h_{\varkappa\lambda})$.

Ist zunächst $\mathfrak{H} \geqq 0$, so kann $\delta_{\nu+1}$ für jedes $\nu \geqq 0$ als die Determinante der nichtnegativen *Hermite*schen Form $\mathfrak{H}_\nu = \mathfrak{H}(x_0, x_1, \ldots, x_\nu)$ keine negative Zahl sein. Ist hierbei $\delta_{\nu+1} > 0$, so wird $\mathfrak{H}_\nu$ eine *positive* Form, und daher ist auch $\mathfrak{H}_{\nu-1} = \mathfrak{H}(x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}, 0)$ positiv definit. Ihre Determinante δ_ν ist demnach auch eine positive Zahl. Dies zeigt, daß für die Zahlen $\delta_1, \delta_2, \ldots$ nur eine der beiden im Satze genannten Möglichkeiten eintreten kann*).

Sind umgekehrt die Zahlen $\delta_1, \delta_2, \ldots$ sämtlich positiv, so ist jede der Formen $\mathfrak{H}_\nu$ als *Hermite*sche Form mit endlich vielen Veränderlichen und lauter positiven Abschnittsdeterminanten bekanntlich positiv definit, also ist gewiß $\mathfrak{H} \geqq 0$. Es möge also der zweite Fall eintreten. Ist $n = 0$, d. h. sind die Zahlen δ_ν sämtlich gleich 0, so verschwinden nach Satz VI alle Koeffizienten $h_{\varkappa\lambda}$ von $\mathfrak{H}$ und es ist $\mathfrak{H} = 0$, $r = 0$. Unsere Behauptung sei nun schon bewiesen, wenn an Stelle von n die Zahl $n-1$ tritt. Wir betrachten dann an Stelle der *Hermite*schen Form $\mathfrak{H}$ die Form $\mathfrak{H}^{(1)}$, deren Abschnitte die auf S. 217 betrachteten Formen $\mathfrak{H}_\nu^{(1)}$ sind. Die zugehörigen Abschnittsdeterminanten sind wegen (15.) die Zahlen

$$\delta_1^{(1)} = \delta_2, \quad \delta_2^{(1)} = \delta_1 \delta_3, \quad \delta_3^{(1)} = \delta_1^2 \delta_4, \ldots .$$

In unserem Falle wird

$$\delta_1^{(1)} > 0, \quad \delta_2^{(1)} > 0, \ldots, \quad \delta_{n-1}^{(1)} > 0, \quad \delta_n^{(1)} = \delta_{n+1}^{(1)} = \cdots = 0.$$

Auf Grund der gemachten Voraussetzung ist daher $\mathfrak{H}^{(1)}$ eine nichtnegative Form des Ranges $n-1$. Die Gleichung (14.) lehrt uns nun, daß $\mathfrak{H}_\nu$ für $\nu \geqq n$ eine nichtnegative Form vom Range $1 + (n-1) = n$ ist. Damit ist der Satz VII aber vollständig bewiesen.

Wir haben am Anfang dieses Paragraphen die Zahl b_0 als reell angenommen. Man erkennt aber leicht, daß die Formel (16.) und die Sätze VI und VII auch für beliebige (von Null verschiedene) Werte von b_0 richtig sind.

---

*) Dies ist ein bekanntes Resultat aus der Theorie der *Hermite*schen Formen.

§ 6.

Umformung der Kriterien des § 3.

Aus der Formel (12.) geht hervor, daß die zum Ausdruck $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ gehörenden Parameter

$$\gamma_\nu = \Phi(c_0, c_1, \ldots, c_\nu) = -\frac{d_\nu}{\delta_\nu}$$

für jeden Index n dann und nur dann den Bedingungen

$$(17.) \qquad |\gamma_0| < 1, |\gamma_1| < 1, \ldots, |\gamma_{n-1}| < 1, |\gamma_n| \leqq 1$$

genügen, wenn

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \ldots, \delta_n > 0, \delta_{n+1} \geqq 0$$

ist. Soll hierbei $|\gamma_n| = 1$ sein und sollen außerdem noch in der Potenzreihe

$$f_n(x) = -\frac{D_n(x)}{\Delta_n(x)} = c_{n0} + c_{n1}x + c_{n2}x^2 + \cdots \qquad (c_{n0} = \gamma_n)$$

alle Koeffizienten $c_{n1}, c_{n2}, \ldots$ gleich 0 werden, so müssen nach Satz VI alle Zahlen δ_ν für $\nu \geqq n+1$ verschwinden. Diese Bedingungen sind auch hinreichend. Dies zeigt aber, daß der Satz II sich folgendermaßen aussprechen läßt:

VIII. *Die Potenzreihenentwicklung eines Ausdrucks der Form*

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots}, \qquad b_0 \neq 0$$

ist dann und nur dann für $|x| < 1$ *konvergent und* $M(f) \leqq 1$, *wenn die Determinanten*

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} \bar{b}_0 & a_0 \\ \bar{a}_0 & b_0 \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} \bar{b}_0 & 0 & a_0 & a_1 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_0 & 0 & a_0 \\ \bar{a}_0 & 0 & b_0 & b_1 \\ \bar{a}_1 & \bar{a}_0 & 0 & b_0 \end{vmatrix}, \ldots$$

entweder sämtlich positiv sind, oder wenn sich eine Zahl n angeben läßt, so daß

$$\delta_1 > 0, \ldots, \delta_n > 0, \delta_{n+1} = \delta_{n+2} = \cdots = 0$$

wird. Der zweite Fall tritt dann und nur dann ein, wenn $f(x)$ *eine rationale Funktion der Form*

$$(18.) \qquad f(x) = \varepsilon \prod_{\nu=1}^{n} \frac{x + \omega_\nu}{1 + \bar{\omega}_\nu x}, \qquad |\omega_\nu| < 1, |\varepsilon| = 1$$

darstellt.

Aus dem Satz VII folgt ferner:

VIII*. *Die Potenzreihenentwicklung des Ausdrucks* $f(x)$ *ist dann und nur dann für* $|x| < 1$ *konvergent und* $M(f) \leqq 1$, *wenn die Hermitesche Form* $\mathfrak{H} = \bar{B}'B - \bar{A}'A$ *nichtnegativ ist. Die Form* $\mathfrak{H}$ *ist dann und nur dann*

vom endlichen Range n, wenn $f(x)$ vom Range n ist, d. h. eine rationale Funktion der Form (18.) *darstellt.*

Der Satz III läßt sich in etwas verallgemeinerter Fassung so formulieren:

IX. *Gegeben seien zwei Potenzreihen*

$$G(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu x^\nu, \qquad H(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} l_\nu x^\nu,$$

wobei l_0 von Null verschieden sein soll. Um zu entscheiden, ob sich bei gegebenem $m \geqq 0$ zwei andere Potenzreihen

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, \qquad h(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$$

so bestimmen lassen, daß

(19.) $$a_0 = k_0,\ b_0 = l_0,\ \ldots,\ a_m = k_m,\ b_m = l_m$$

wird und zugleich die Potenzreihe

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

für $|x| < 1$ konvergiert und der Bedingung $|f(x)| \leqq 1$ genügt, bilde man den Quotienten

$$F(x) = \frac{G(x)}{H(x)} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots$$

und betrachte die zugehörigen Determinanten

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} \bar{l}_0 & k_0 \\ \bar{k}_0 & l_0 \end{vmatrix}, \qquad \eta_2 = \begin{vmatrix} \bar{l}_0 & 0 & k_0 & k_1 \\ \bar{l}_1 & \bar{l}_0 & 0 & k_0 \\ \bar{k}_0 & 0 & l_0 & l_1 \\ \bar{k}_1 & \bar{k}_0 & 0 & l_0 \end{vmatrix}, \ \ldots$$

Die Aufgabe läßt dann und nur dann eine Lösung zu, wenn entweder die Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m+1}$ sämtlich positiv sind oder wenn

(20.) $$\eta_1 > 0, \ldots, \eta_n > 0,\ \eta_{n+1} = \eta_{n+2} = \cdots = \eta_{m+1} = 0 \qquad (0 \leqq n \leqq m)$$

wird. Ist hierbei $n < m-1$, so kommen noch die Bedingungen

(21.) $$\eta_{m+2} = \eta_{m+3} = \cdots = \eta_{2m-n} = 0$$

hinzu. In beiden Fällen können die Koeffizienten $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots$ beliebig gewählt werden. Im ersten Falle läßt die Aufgabe dann noch unendlich viele Lösungen zu. Im zweiten Falle sind $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$, wenn $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots$ fixiert werden, eindeutig bestimmt und die zugehörige Funktion $f(x)$ ist eine wohlbestimmte rationale Funktion der Form (18.)*).*

---

*) Die Einführung der Koeffizienten $k_{m+1}, l_{m+1}, \ldots$ erscheint hier als überflüssig, der Beweis gestaltet sich aber etwas einfacher, wenn man den Satz so ausspricht, wie das hier geschieht. Es würde ferner genügen zu verlangen, daß $c_0 = C_0, c_1 = C_1, \ldots, c_m = C_m$ wird. Es ist jedoch zu beachten, daß die Berechnung der Koeffizienten C_ν gänzlich vermieden wird.

Beim Beweis hat man zu berücksichtigen, daß die $m+1$ ersten der zu f gehörenden Determinanten δ_ν mit den entsprechenden η_ν übereinstimmen. Die Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m+1}$ hängen nur von den $2m+2$ Koeffizienten $k_0, l_0, \ldots, k_m, l_m$ ab. Auch die im zweiten Fall hinzukommenden Bedingungen (21.) liefern nur Beziehungen zwischen diesen $2m+2$ Koeffizienten. Dies ergibt sich ohne Mühe aus der auf S. 219 durchgeführten Betrachtung. Die Zahl l_0 nehmen wir, was offenbar gestattet ist, als reell an.

Aus VIII folgt zunächst, daß die Aufgabe nur dann einen Sinn hat, wenn unter den (reellen) Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m+1}$ keine negativ ist, und daß, wenn eine dieser Zahlen Null ist, auch alle folgenden verschwinden müssen. Sind nun die Determinanten

$$\delta_1 = \eta_1, \delta_2 = \eta_2, \ldots, \delta_n = \eta_n \qquad (n \leqq m)$$

positiv (> 0), so genügen die mit Hilfe der Zahlen (19.) gebildeten Ausdrücke

$$\gamma_0 = \frac{k_0}{l_0} = \frac{a_0}{b_0}, \gamma_1 = -\frac{d_1}{\delta_1}, \ldots, \gamma_n = -\frac{d_n}{\delta_n}$$

den Bedingungen (17.) und hierbei ist dann und nur dann $|\gamma_n| = 1$, wenn $\delta_{n+1} = \eta_{n+1} = 0$ wird. Ist $n = m$ und $\eta_{m+1} > 0$, so wähle man für $\gamma_{m+1}, \gamma_{m+2}, \ldots$ beliebige Größen, die absolut $\leqq 1$ sind. Die Potenzreihe

$$f(x) = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots] = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\nu)\, x^\nu$$

ist dann für $|x| < 1$ konvergent und $M(f) \leqq 1$, ferner stimmen ihre $m+1$ ersten Koeffizienten mit den Zahlen $C_0, C_1, \ldots, C_m$ überein. Ist dann $b_\mu = l_\mu$ für $0 \leqq \mu \leqq m$, so hat bei beliebiger Wahl der Koeffizienten $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots$ die Potenzreihe $g(x) = f(x)\, h(x)$ die Eigenschaft, daß ihre $m+1$ Koeffizienten die vorgeschriebenen Werte $k_0, k_1, \ldots, k_m$ erhalten. Dieselbe Betrachtung gilt auch im Falle $n = m$, $\eta_{m+1} = 0$, wenn unter $f(x)$ die alsdann allein in Betracht kommende rationale Funktion $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ verstanden wird (vergl. den Schluß des § 3).

Es sei also $n < m$ und $\eta_{n+1} = \cdots = \eta_{m+1} = 0$. Die einzige Funktion $f(x)$, die eine Lösung der Aufgabe liefern kann, ist jetzt die rationale Funktion $[x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n]$. Es ist also zu untersuchen, ob die Koeffizienten a_ν und b_ν so gewählt werden können, daß

$$(22.)\quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n] \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu,\ a_\mu = k_\mu, b_\mu = l_\mu \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m)$$

wird. Ist nun $n = 0$, d. h. sind alle Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m+1}$ gleich 0, so wird $[x; \gamma_0] = \gamma_0$ und es wird nur verlangt, daß

$$k_1 = \gamma_0 l_1,\ k_2 = \gamma_0 l_2,\ \ldots,\ k_m = \gamma_0 l_m \qquad \left(\gamma_0 = \frac{k_0}{l_0},\ |\gamma_0| = 1\right)$$

wird. Dies tritt (vergl. S. 219) dann und nur dann ein, wenn auch die Zahlen $\eta_{m+2}, \ldots, \eta_{2m}$ sämtlich verschwinden. Es sei nun schon für ein gegebenes $n < m-1$ (bei beliebigem m) bewiesen, daß die Relationen (22.) sich dann und nur dann befriedigen lassen, wenn zu (20.) noch die Bedingungen (21.) hinzukommen, und hierbei sollen die Koeffizienten $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots$ beliebig gewählt werden können. Ist dann

$$\eta_1 > 0,\ \eta_2 > 0,\ \ldots,\ \eta_{n+1} > 0,\ \eta_{n+2} = \cdots = \eta_{m+1} = 0,$$

so haben wir die Relationen

$$(23.)\quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = [x; \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}] \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu,\ a_\mu = k_\mu,\ b_\mu = l_\mu \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, m)$$

zu untersuchen. Wir betrachten nun die Quotienten

$$F_1 = \frac{1}{x}\frac{F-\gamma_0}{1-\bar{\gamma}_0 F} = \frac{\Sigma k'_\nu x^\nu}{\Sigma l'_\nu x^\nu}, \qquad f_1 = \frac{1}{x}\cdot\frac{f-\gamma_0}{1-\bar{\gamma}_0 f} = \frac{\Sigma a'_\nu x^\nu}{\Sigma b'_\nu x^\nu}, \qquad \left(\gamma_0 = \frac{k_0}{l_0} = \frac{a_0}{b_0}\right).$$

Hierbei ist

$$k'_\nu = l_0 k_{\nu+1} - k_0 l_{\nu+1},\ l'_\nu = \bar{l}_0 l_\nu - \bar{k}_0 k_\nu,$$
$$a'_\nu = b_0 a_{\nu+1} - a_0 b_{\nu+1},\ b'_\nu = \bar{b}_0 b_\nu - \bar{a}_0 a_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

zu setzen. Nimmt man schon an, daß $a_0 = k_0$, $b_0 = l_0$ ist, so gilt offenbar (23.) dann und nur dann, wenn

$$(24.)\quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a'_\nu x^\nu = [x; \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1}] \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} b'_\nu x^\nu,\ a'_\mu = k'_\mu,\ b'_\mu = l'_\mu \qquad (\mu = 0, 1, \ldots m-1)$$

und außerdem noch $b'_m = l'_m$ ist. Nun treten aber beim Übergang von F zu F_1 an Stelle der Determinanten η_ν die Zahlen $\eta_\nu^{(1)} = \eta_1^{\nu-1}\eta_{\nu+1}$ (vergl. Formel (15.)). Diese Zahlen genügen also den Bedingungen

$$\eta_1^{(1)} > 0,\ \ldots,\ \eta_n^{(1)} > 0,\ \eta_{n+1}^{(1)} = \cdots = \eta_m^{(1)} = 0.$$

Auf Grund der über n gemachten Voraussetzung können wir also schließen, daß die Relationen (24.) sich dann und nur dann befriedigen lassen, wenn noch

$$\eta_{m+1}^{(1)} = \eta_{m+2}^{(1)} = \cdots = \eta_{2(m-1)-n}^{(1)} = 0$$

ist. Dies liefert, wie zu beweisen ist, für die η_ν die Bedingungen

$$\eta_{m+2} = \eta_{m+3} = \cdots = \eta_{2m-(n+1)} = 0.$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so können die Koeffizienten $b'_m, b'_{m+1}, \ldots$ beliebig gewählt werden, insbesondere kann also noch angenommen werden, daß $b'_m = l'_m$ ist.

§ 7.

Beschränkte Potenzreihen und beschränkte Bilinearformen.

Eine Bilinearform

$$A(x, y) = \sum_{x,\lambda}^{\infty}{}_0 a_{x\lambda} x_x y_\lambda$$

mit der Koeffizientenmatrix $A = (a_{x\lambda})$ bezeichnet man bekanntlich nach *Hilbert**) als *beschränkt*, wenn sich eine endliche Zahl m angeben läßt, so daß für alle reellen und komplexen Zahlen $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots$ und für jedes n

$$|A_n(x, y)| = \left|\sum_{x,\lambda}^{n}{}_0 a_{x\lambda} x_x y_\lambda\right| \leqq m \sqrt{\sum_{x=0}^{n} |x_x|^2 \cdot \sum_{\lambda=0}^{n} |y_\lambda|^2}$$

wird. Jede Zahl m, die diesen Bedingungen genügt, wird eine *obere Schranke*, die kleinste unter ihnen die *obere Grenze* $m(A)$ *von* A genannt. Ist A beschränkt, so sind die Reihen $\sum_{x=0}^{\infty} |a_{x\lambda}|^2$ und $\sum_{x=0}^{\infty} |a_{\lambda x}|^2$ für jeden Wert von λ konvergent und ihre Summen sind höchstens gleich $(m(A))^2$. Es können daher die Matrizen

$$\bar{A}' A = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_{\nu x} a_{\nu\lambda}\right), \qquad A \bar{A}' = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{x\nu} \bar{a}_{\lambda\nu}\right)$$

gebildet werden. Bezeichnet man ihre Elemente mit $h_{x\lambda}$ und $h'_{x\lambda}$, so wird für jedes Wertsystem $x_0, x_1, \ldots$ mit konvergenter Summe $\sum_{\nu=0}^{\infty} |x_\nu|^2$

$$\bar{A}' A = \sum_{x,\lambda}^{\infty}{}_0 h_{x\lambda} \bar{x}_x x_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\nu\lambda} x_\lambda\right|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |x_\nu|^2,$$

$$A \bar{A}' = \sum_{x,\lambda}^{\infty}{}_0 h'_{x\lambda} x_x \bar{x}_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|\sum_{x=0}^{\infty} a_{x\nu} x_x\right|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |x_\nu|^2$$

und die hier auftretenden unendlichen Reihen sind konvergent. Versteht man daher unter E die *Hermite*sche Form $\sum_{\nu=0}^{\infty} |x_\nu|^2$ (und auch die zugehörige unendliche Einheitsmatrix), so sind $m^2 E - \bar{A}' A$ und $m^2 E - A \bar{A}'$ nichtnegative *Hermite*sche Formen. Die Formen $\bar{A}' A$ und $A \bar{A}'$ sind wieder beschränkt und ihre oberen Grenzen sind genau gleich dem Quadrat der Zahl $m(A)$.

Weiß man umgekehrt nur, daß $\sum_{x=0}^{\infty} |a_{x\lambda}|^2$ für jedes λ konvergent sind, so kann man die *Hermite*sche Matrix $\bar{A}' A = (h_{x\lambda})$ bilden. Die Bilinear-

*) Gött. Nachrichten, 1906, S. 157.

form A ist dann beschränkt und m eine obere Schranke von A, wenn die *Hermite*sche Form mit der Koeffizientenmatrix $m^2E - \bar{A}'A$ nichtnegativ ist, d. h. wenn ihre „Abschnitte" sämtlich nichtnegative Formen sind. Um die obere Grenze $m(A)$ von A zu berechnen, hat man nur für jedes n die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x-h_{00}, & -h_{01}, \ldots, & -h_{0n} \\ -h_{10}, & x-h_{11}, \ldots, & -h_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -h_{n0}, & -h_{n1}, \ldots, & x-h_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

zu betrachten. Ist μ_n die größte unter den (sämtlich reellen, nichtnegativen) Wurzeln dieser Gleichung, so wird $\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \mu_3 \leqq \ldots$ und

$$m(A) = \lim_{n=\infty} \sqrt{\mu_n}\,^*).$$

Reduziert sich nun bei der früheren Betrachtung der Nenner $h(x)$ des Quotienten $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ auf eine positive Konstante m, so wird $B = mE$ und $\bar{B}'B = m^2E$. Aus den Sätzen VIII und VIII* ergibt sich daher ohne weiteres:

X. *Die Potenzreihe*

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

ist dann und nur dann für $|x| < 1$ *konvergent und beschränkt, wenn die Bilinearform*

$$A(x, y) = \sum_{\varkappa \leqq \lambda} a_{\lambda-\varkappa} x_\varkappa y_\lambda, \qquad (\varkappa, \lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

beschränkt ist. Die obere Grenze $M(g)$ *der Potenzreihe* $g(x)$ *ist genau gleich der oberen Grenze* $m(A)$ *der Bilinearform* A.

X*. *Setzt man für* $\varkappa \leqq \lambda$

$$h_{\varkappa\lambda} = \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \bar{a}_{\varkappa-\nu} a_{\lambda-\nu}$$

und $h_{\lambda\varkappa} = \bar{h}_{\varkappa\lambda}$, *so ist* m *dann und nur dann eine obere Schranke der Potenzreihe* $g(x)$, *wenn die Hermitesche Form*

$$\mathfrak{H} = m^2E - \bar{A}'A = m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{x}_\nu x_\nu - \sum_{\varkappa,\lambda}^{\infty}{}_0\, h_{\varkappa\lambda} \bar{x}_\varkappa x_\lambda = m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{x}_\nu x_\nu - \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \left| \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x_{\varkappa+\lambda} \right|^2$$

---

*) Dasselbe gilt auch für $A\bar{A}'$. Die hier angeführten Sätze über Bilinearformen sind mit durchaus elementaren Hilfsmitteln zu beweisen. Vergl. *E. Hellinger* und *O. Toeplitz*, Math. Ann., Bd. 69, S. 289, und meine Arbeit, dieses Journal, Bd. 140, S. 1.

nichtnegativ ist. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Abschnittsdeterminanten $\delta_1, \delta_2, \ldots$ *von* $\mathfrak{H}$ *entweder sämtlich positiv* (>0) *sind, oder wenn die n ersten unter ihnen positiv, die folgenden alle Null sind. Notwendig und hinreichend für das Eintreten des zweiten Falles ist, daß* $g(x)$ *eine rationale Funktion der Form*

$$g(x) = c \prod_{\nu=1}^{n} \frac{x + \omega_\nu}{1 + \bar{\omega}_\nu x}, \qquad |\omega_\nu| < 1, |c| = m$$

darstellt. Die Zahl n gibt hierbei zugleich den Rang der Hermiteschen Form $\mathfrak{H}$ *an.*

Verzichtet man darauf, die Bedeutung des Ranges der Form $\mathfrak{H}$ und das Verhalten der Determinanten δ_ν zu charakterisieren, so kann man den Satz X ohne Mühe direkt beweisen.

Nimmt man an, daß die Potenzreihe $g(x)$ für $|x|<1$ konvergent und $|g(x)| \leqq m$ ist, so betrachte man eine zweite Potenzreihe

$$u(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu x^\nu,$$

von der nur verlangt wird, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} |u_\nu|^2$ konvergieren soll. Setzt man

$$g(x)\, u(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu x^\nu, \quad v_\nu = a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu-1} + \cdots + a_\nu u_0,$$

so wird bekanntlich für $0 \leqq r < 1$

$$\text{(25.)} \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |v_\nu|^2 r^{2\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\varphi})\, u(re^{i\varphi})|^2 d\varphi.$$

Da aber $|g(re^{i\varphi})| \leqq m$ ist, so folgt hieraus

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |v_\nu|^2 r^{2\nu} \leqq \frac{m^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})|^2 d\varphi = m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |u_\nu|^2 r^{2\nu} \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |u_\nu|^2.$$

Für $u_{n+1} = u_{n+2} = \cdots = 0$ wird daher

$$\sum_{\nu=0}^{n} |v_\nu|^2 r^{2\nu} \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu|^2.$$

Läßt man r gegen 1 konvergieren, so erhält man

$$\sum_{\nu=0}^{n} |v_\nu|^2 = \sum_{\nu=0}^{n} |a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu-1} + \cdots + a_\nu u_0|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu|^2.$$

Schreibt man in dieser Formel, die für beliebige Größen $u_0, u_1, \ldots, u_n$ gilt, u_ν an Stelle von $u_{n-\nu}$, so geht sie über in

$$\text{(26.)} \qquad \sum_{\nu=0}^{n} |a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu+1} + \cdots + a_{n-\nu} u_n|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu|^2.$$

Weiß man umgekehrt, daß diese Ungleichung für jedes n und für jedes Wertsystem $u_0, u_1, u_2, \ldots$ gilt, so erhält man insbesondere für $u_\nu = \bar{a}_\nu$

$$|a_0 a_0 + a_1 \bar{a}_1 + \cdots + a_n a_n|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu|^2,$$

d. h. $\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu|^2 \leqq m^2$. Da dies für jedes n gilt, so ergibt sich, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2$ konvergiert und daher ist auch $g(x)$ für $|x| < 1$ konvergent. Zugleich erkennt man auf Grund einer bekannten Regel, daß auch die Reihen

$$a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu+1} + \cdots \qquad (\nu = 0,1,2,\ldots)$$

konvergent sind, sobald nur $\Sigma |u_\nu|^2$ konvergiert. Aus (26.) folgt nun für $n' \leqq n$

$$\sum_{\nu=0}^{n'} |a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu+1} + \cdots + a_{n-\nu} u_n|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu|^2.$$

Hält man n' fest und läßt n über alle Grenzen wachsen, so ergibt sich

$$\sum_{\nu=0}^{n'} |a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu+1} + \cdots|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |u_\nu|^2,$$

folglich ist auch

$$\text{(27.)} \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_0 u_\nu + a_1 u_{\nu+1} + \cdots|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |u_\nu|^2.$$

Setzt man hier nun, wenn $|x| < 1$ ist, $u_\lambda = x^\lambda$, so erhält man

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |x|^{2\nu} \left| \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda \right|^2 \leqq m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |x|^{2\nu},$$

d. h. $|g(x)|^2 \leqq m^2$.

Die Potenzreihe $g(x)$ ist also dann und nur dann für $|x| < 1$ konvergent und $|g(x)| \leqq m$, wenn die Ungleichungen (26.) für alle n und für alle Wertsysteme $u_0, u_1, \ldots$ bestehen. Diese Relationen besagen aber nur, daß jeder Abschnitt von $m^2 E - \bar{A}' A$ nichtnegativ ist, oder was dasselbe ist, daß die Bilinearform A beschränkt und $m(A) \leqq m$ ist.

§ 8.

Der *Carathéodory-Toeplitz*sche Satz.

Durch die lineare Transformation

$$w' = \frac{1-w}{1+w}, \qquad w = \frac{1-w'}{1+w'}$$

geht die Halbebene $\Re(w) > 0$ in den Einheitskreis $|w'| < 1$ über und der Kreis $|w| < 1$ in die Halbebene $\Re(w') > 0$. Soll sich daher eine Funktion $\varphi(x)$ für $|x| < 1$ regulär verhalten und einen positiven reellen Bestandteil haben, so muß

$$f(x) = \frac{1-\varphi(x)}{1+\varphi(x)}$$

für $|x| < 1$ regulär und $|f(x)| < 1$ sein. Auch das Umgekehrte ist richtig. Ist insbesondere $\varphi(x)$ als Quotient zweier Potenzreihen

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, \qquad h(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu \qquad (b_0 \neq 0)$$

gegeben, so wird

$$f(x) = \frac{h(x)-g(x)}{h(x)+g(x)}.$$

Werden nun wie auf S. 215 den Potenzreihen $g(x)$ und $h(x)$ die Matrizen (Bilinearformen) A und B zugeordnet, so gehören zu $h(x)-g(x)$ und $h(x)+g(x)$ die Matrizen $B-A$ und $B+A$. Um nun zu entscheiden, ob $\varphi(x)$ für $|x|<1$ regulär ist und einen positiven reellen Bestandteil hat, ist nach dem Früheren nur die *Hermite*sche Form mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathfrak{H} = (\bar{B}' + \bar{A}')(B+A) - (\bar{B}' - \bar{A}')(B-A) = 2(\bar{B}'A + \bar{A}'B)$$

zu betrachten. Setzt man speziell $h(x)=1$, so wird $B=E$ und $\mathfrak{H} = 2(A+\bar{A}')$.

Auf Grund der Sätze VIII und VIII* ergibt sich daher unmittelbar:

XI. *Die Potenzreihe*

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (a_0 = a_0' + a_0'' i)$$

ist dann und nur dann für $|x|<1$ *konvergent und der reelle Bestandteil von* $\varphi(x)$ *positiv, wenn die Hermitesche Form*

$$H = A + \bar{A}' = \sum_{\lambda \geq \varkappa} (a_{\lambda-\varkappa} x_\varkappa \bar{x}_\lambda + \bar{a}_{\lambda-\varkappa} x_\lambda \bar{x}_\varkappa) \qquad (\varkappa, \lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

nichtnegativ ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, daß die Abschnittsdeterminanten

$$\delta_1 = 2a_0', \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 2a_0', & a_1 \\ \bar{a}_1, & 2a_0' \end{vmatrix}, \qquad \delta_3 = \begin{vmatrix} 2a_0', & a_1, & a_2 \\ \bar{a}_1, & 2a_0', & a_1 \\ \bar{a}_2, & \bar{a}_1, & 2a_0' \end{vmatrix}, \ldots$$

von H *entweder sämtlich positiv* (>0) *sind oder*

$$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \ldots, \delta_n > 0, \delta_{n+1} = \delta_{n+2} = \cdots = 0$$

wird. Der zweite Fall tritt dann und nur dann ein, wenn $\varphi(x)$ *eine rationale Funktion der Form*

$$(28.) \qquad \varphi(x) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}, \qquad f(x) = \varepsilon \prod_{\nu=1}^{n} \frac{x+\omega_\nu}{1+\bar{\omega}_\nu x} \qquad (|\omega_\nu|<1, |\varepsilon|=1)$$

ist. Die Zahl n *gibt hierbei zugleich den Rang der Form* H *an.*

Dies ist der in der Einleitung erwähnte *Carathéodory*sche Satz in der *Toeplitz*schen Fassung*). Herr *Carathéodory* charakterisiert jedoch im Grenzfall eines endlichen Ranges die Ausnahmefunktionen (28.) anders, nämlich als rationale Funktionen, die eine Partialbruchzerlegung der Form

$$\varphi(x) = bi - \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \frac{x+\varepsilon_\nu}{x-\varepsilon_\nu} \tag{29.}$$

zulassen, wobei b reell, die ε_ν voneinander verschieden und vom absoluten Betrage 1 sind und die r_ν positive reelle Zahlen bedeuten.

Eine Funktion vom Typus (28.) läßt sich offenbar kennzeichnen als ein Ausdruck der Form

$$\varphi(x) = \frac{P-Q}{P+Q}, \tag{30.}$$

wo Q ein Polynom n-ten Grades ist, das nur im Innern des Einheitskreises Null wird, und $P(x) = x^n \bar{Q}(x^{-1})$ zu setzen ist. Die *Carathéodory*sche Formel (29.) liefert also den rein algebraischen Satz:

XII. *Ist*

$$Q(x) = a \prod_{\nu=1}^{n} (x + \omega_\nu)$$

ein Polynom n-ten Grades, dessen Nullstellen sämtlich innerhalb des Einheitskreises liegen, und setzt man $P(x) = x^n \bar{Q}(x^{-1})$, so sind die n Wurzeln $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ der Gleichung

$$F(x) = P(x) + Q(x) = 0 \tag{31.}$$

*voneinander verschieden und auf dem Einheitskreis gelegen***). *Schreibt man ferner die Partialbruchzerlegung des Ausdrucks* (30.) *in der Form*

$$\frac{P-Q}{P+Q} = c - \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \frac{x+\varepsilon_\nu}{x-\varepsilon_\nu}, \tag{32.}$$

so wird die Konstante c rein imaginär und die Koeffizienten r_ν sind reell und positiv.

Dieser Satz läßt sich leicht auch direkt beweisen. Zunächst folgt

---

*) Daß der Rang n der (nichtnegativen) Form H allein mit Hilfe der δ_ν bestimmt werden kann, wird in den auf S. 205 zitierten Abhandlungen nicht ausdrücklich hervorgehoben. Einen einfachen Beweis hierfür hat mir Herr *Carathéodory* bereits im Jahre 1911 brieflich mitgeteilt.

**) Allgemeiner liegen die Wurzeln der Gleichung $P(x) + \lambda Q(x) = 0$ für $|\lambda| < 1$ außerhalb, für $|\lambda| > 1$ innerhalb und für $|\lambda| = 1$ auf der Peripherie des Einheitskreises. Im letzteren Falle hat die Gleichung keine mehrfachen Wurzeln.

aus $F(x) = x^n \overline{F}(x^{-1})$, daß zugleich mit ε_ν auch $\bar{\varepsilon}_\nu^{-1}$ eine Wurzel der Gleichung (31.) ist. Innerhalb des Einheitskreises kann $F(x)$ aber nicht verschwinden. Denn $\frac{Q}{P}$ hat in diesem Kreise keinen Pol und ist für $|x| = 1$ vom absoluten Betrage 1. Für $|x| < 1$ ist daher

$$|F(x)| \geqq |P(x)| - |Q(x)| > 0.$$

Da ferner aus $|\varepsilon_\nu| > 1$ folgen würde, daß $|\bar{\varepsilon}_\nu^{-1}| < 1$ ist, muß $|\varepsilon_\nu| = 1$ sein. Aus $P(\varepsilon_\nu) = -Q(\varepsilon_\nu)$ ergibt sich noch

$$\frac{F'(\varepsilon_\nu)}{P(\varepsilon_\nu)} = \frac{P'(\varepsilon_\nu)}{P(\varepsilon_\nu)} - \frac{Q'(\varepsilon_\nu)}{Q(\varepsilon_\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{n} \left(\frac{1}{\varepsilon_\nu + \bar{\omega}_\lambda^{-1}} - \frac{1}{\varepsilon_\nu + \omega_\lambda} \right) = -\varepsilon_\nu^{-1} s_\nu,$$

wobei s_ν in der Form

$$s_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1 - \omega_\lambda \bar{\omega}_\lambda}{|\varepsilon_\nu + \omega_\lambda|^2}$$

geschrieben werden kann. Diese Zahl ist aber wegen $|\omega_\lambda| < 1$ reell und positiv. Daher ist $F'(\varepsilon_\nu)$ nicht Null, die ε_ν sind also voneinander verschieden. Bringt man nun den Ausdruck (30.), was jedenfalls möglich ist, auf die Form (32.), so wird

$$-2\varepsilon_\nu r_\nu = \frac{P(\varepsilon_\nu) - Q(\varepsilon_\nu)}{P'(\varepsilon_\nu) + Q'(\varepsilon_\nu)} = \frac{2P(\varepsilon_\nu)}{F'(\varepsilon_\nu)} = -\frac{2\varepsilon_\nu}{s_\nu}.$$

Daher ist $r_\nu = \frac{1}{s_\nu}$ eine positive reelle Zahl. Setzt man nun in (32.) für x irgendeine (von den ε_ν verschiedene) Zahl vom absoluten Betrage 1 ein, so wird der links stehende Ausdruck und jedes Glied der rechts stehenden Summe rein imaginär. Folglich ist auch c eine rein imaginäre Größe.

Wir haben hier den Satz XI aus dem scheinbar allgemeineren Satze VIII gefolgert. Man kann aber auch leicht diesen Satz mit Hilfe des Satzes XI beweisen.

Ist nämlich $\varphi(x)$ nicht als eine Potenzreihe, sondern wie am Anfang dieses Paragraphen als Quotient zweier Potenzreihen $g(x)$ und $h(x)$ gegeben und sind wieder A und B die zugehörigen Matrizen, so denke man sich $\varphi(x)$ nach Potenzen von x entwickelt. Die dieser Potenzreihe entsprechende Matrix C ist, wie aus $A = CB$ folgt (vergl. S. 216), nichts anderes als die Matrix AB^{-1}*). Hierbei ist zu beachten, daß B als „Dreiecksmatrix", die in der Hauptdiagonale nur die von Null verschiedene Zahl b_0 enthält, eine eigentliche Inverse besitzt. Um nun zu entscheiden, ob die Potenz-

*) Vergl. *O. Toeplitz*, Math. Ann. Bd. 70, S. 357.

reihe $\varphi(x)$ für $|x|<1$ konvergiert und einen positiven reellen Bestandteil besitzt, hat man nur die *Hermite*sche Form

$$H = C + \bar{C}' = A B^{-1} + (\bar{B}')^{-1} \bar{A}'$$

zu betrachten. Diese Form ist aber dann und nur dann nichtnegativ, wenn

$$\bar{B}' H B = \bar{B}' A + \bar{A}' B$$

diese Eigenschaft besitzt*). Außerdem multipliziert sich beim Übergang von H zu $\bar{B}' H B$ die ν-te Abschnittsdeterminante δ_ν von H nur mit dem positiven Faktor $|b_0|^{2\nu}$.

Ist nun ferner ein Quotient $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ zweier Potenzreihen gegeben und will man entscheiden, ob die zugehörige Potenzreihenentwicklung für $|x|<1$ konvergiert und der Bedingung $|f(x)|<1$ genügt, so hat man nur zu untersuchen, ob die Reihenentwicklung von

$$\varphi(x) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} = \frac{h(x)-g(x)}{h(x)+g(x)}$$

für $|x|<1$ konvergiert und einen positiven reellen Bestandteil besitzt. Sind aber wieder A und B die zu $g(x)$ und $h(x)$ gehörenden Matrizen, so hat man bei $\varphi(x)$ die *Hermite*sche Form

$$(\bar{B}' + \bar{A}')(B - A) + (\bar{B}' - \bar{A}')(B + A) = 2(\bar{B}' B - \bar{A}' A)$$

zu betrachten. Auf Grund dieser Gleichung und der vorhin über die Abschnittsdeterminanten gemachten Bemerkung schließt man nun ohne weiteres, daß aus dem Satz XI die Sätze VIII und VIII* folgen.

Es ist auch leicht zu sehen, wie der Satz IX des vorigen Paragraphen abzuändern ist, wenn man an Stelle der Funktionen $f(x)$, die der Bedingung $|f(x)| \leqq 1$ (für $|x|<1$) genügen sollen, die Funktionen $\varphi(x)$ mit positivem reellem Teil betrachtet. Man erhält auf diese Weise einen weiteren Satz von *C. Carathéodory* (Rend. di Palermo, Bd. 32, S. 207 ff.) in etwas verallgemeinerter Fassung.

Berlin, im September 1916.

---

*) Man erkennt leicht, daß in unserem Fall mit den unendlichen Matrizen in dieser Weise operiert werden darf.

Die Verallgemeinerung des *Legendre*schen Symboles für allgemeine algebraische Körper.

Von Herrn *K. Hensel* in Marburg a. d. L.

Einleitung.

Es sei K ein ganz beliebiger Körper algebraischer Zahlen und $\mathfrak{p}$ irgend ein algebraischer Primteiler desselben, welcher zu der reellen Primzahl p gehört. Es möge e die Ordnung und f der Grad von $\mathfrak{p}$ sein, so daß p genau durch $\mathfrak{p}^e$ teilbar und daß $n(\mathfrak{p}) = p^f$ ist; es werde endlich $ef = \lambda$ gesetzt.

Jede Zahl A des Körpers K läßt sich dann für den Bereich von $\mathfrak{p}$ eindeutig in der folgenden Form darstellen, welche ich als ihre *additive Grundform* bezeichnen will:

$$(1.) \qquad A = w_a \pi^a + w_{a+1} \pi^{a+1} + \cdots \quad (\mathfrak{p}),$$

d. h. sie ist für jede noch so hohe Potenz $\mathfrak{p}^k$ von $\mathfrak{p}$ als Modul den Näherungswerten genügend hoher Ordnung der rechts stehenden Reihe kongruent. Hier bedeutet π eine Primzahl für den Bereich von $\mathfrak{p}$, d. h. eine nur durch die erste Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbare Zahl von K, und die Entwicklungskoeffizienten $w_a, w_{a+1}, \ldots$ sind eindeutig bestimmte $(p^f - 1)$-te Einheitswurzeln, welche sämtlich in dem hier zu betrachtenden Bereiche vorhanden sind und der Reihe nach, so weit man will, bestimmt werden können. Der ganzzahlige Exponent a wird die *Ordnungszahl* von a in Bezug auf den Primteiler $\mathfrak{p}$ genannt. Umgekehrt ist jede solche Zahlgröße (1.) mit beliebig gegebenen $(p^f - 1)$-ten Einheitswurzeln als Koeffizienten, welche eine *π-adische Zahl von K* genannt werden soll, der Grenzwert der gesetzmäßigen Folge $(w_a \pi^a,\ w_a \pi^a + w_{a+1} \pi^{a+1},\ \ldots)$ ihrer Näherungswerte, welche sämtlich dem Körper K angehören.

Die Gesamtheit aller dieser π-adischen Zahlen (1.) bildet einen algebraischen Körper $K(\mathfrak{p})$ vom λ-ten Grade über dem Körper $K(p)$ der rationalen p-adischen Zahlen. Seine Untersuchung liefert alle arithmetischen Eigenschaften der algebraischen Zahlen von K in Bezug auf den Primteiler $\mathfrak{p}$.

Viel wichtiger als die additive Darstellung (1.) aller algebraischen Zahlen A für den Bereich von $\mathfrak{p}$ ist die multiplikative, da alle wesentlichen arithmetischen Eigenschaften jener Zahlen aus dieser und aus ihr allein vollständig abgeleitet werden können. Um so wunderbarer ist es, daß auf sie meines Wissens bisher noch niemals allgemein eingegangen ist. Eine Ausnahme, aber nur für die Betrachtung der Zahlbereiche nach der Größe ihrer Elemente, nicht wie hier, nach ihren Teilbarkeitseigenschaften, bilden allein die wundervollen Untersuchungen von *Dirichlet* über die algebraischen Einheiten und die sich an sie anschließenden Arbeiten, insbesondere die Sätze von *Hermann Minkowski* über die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen nach ihrer Größe in seiner „Geometrie der Zahlen".

Ich habe diese Untersuchung in voller Allgemeinheit in drei in dieser Zeitschrift kürzlich veröffentlichten Abhandlungen durchgeführt*) und will ihre Ergebnisse, soweit sie im folgenden gebraucht werden, kurz angeben.

Jeder Körper $K(\mathfrak{p})$ besteht aus Nichteinheiten, d. h. solchen Zahlen, von denen eine positive oder negative unendlich große Potenz Null ist, und aus Einheiten, welche diese Eigenschaft nicht haben. Ist π irgend eine Primzahl aus $K(\mathfrak{p})$, so kann jede Zahl A dieses Bereiches eindeutig in der Form $A = \pi^a \xi$ dargestellt werden, wo a die Ordnungszahl von A ist und ξ eine Einheit bedeutet.

Unter den Einheiten hebe ich zuerst die von endlicher Ordnung, d. h. diejenigen Zahlen $\overline{w}$ hervor, von denen eine Potenz $\overline{w}^{\overline{P}}$ mit end-

---

*) I. Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers. Dieses Journal Bd. 146 S. 189—215.

II. Untersuchung der Zahlen eines algebraischen Körpers für eine beliebige Primteilerpotenz als Modul. Dieses Journal Bd. 146 S. 216—228.

III. Allgemeine Theorie der Kongruenzklassengruppen und ihrer Invarianten in algebraischen Körpern. Dieses Journal Bd. 147 S. 2—15.

Ich werde diese Arbeiten im folgenden durch H^{I}, H^{II}, H^{III} bezeichnen.

lichem positivem Exponenten gleich Eins ist, welche also $\bar{P}$-te Einheitswurzeln sind. Ist w eine Einheitswurzel von der höchsten möglichen Ordnung P, so sind alle und nur die übrigen Einheitswurzeln $\bar{w}$ von $K(\mathfrak{p})$ in der Reihe

$$w^b \qquad (b=0,1,\dots P-1)$$

enthalten. Ein beliebiger Körper $K(\mathfrak{p})$ enthält stets alle $P=(p^f-1)p^\nu$-ten Einheitswurzeln und keine anderen; hier ist f der Grad von $\mathfrak{p}$, während der Exponent ν eine von der Natur des Körpers $K(\mathfrak{p})$ abhängige positive ganze Zahl oder Null bedeutet. (Vgl. H[I] S. 210 (6.))

Alle Zahlen von $K(\mathfrak{p})$ können nun multiplikativ durch ein Fundamentalsystem:

$$(2.) \qquad (\pi, w, \eta_1, \eta_2, \dots \eta_\lambda)$$

eindeutig dargestellt werden, in welchem die $\lambda = ef$ zu π und w hinzutretenden Zahlen η s. g. Einseinheiten d. h. solche Einheiten:

$$(2^a.) \qquad \eta = 1 + w_k\pi^k + \dots + w_l\pi^l$$

sind, deren additive Darstellung (1.) mit 1 beginnt; jede von ihnen kann so ausgewählt werden, daß ihre Entwickelung $(2^a.)$ abbricht. Die Ordnungszahl k des auf 1 folgenden Gliedes soll *der Grad von* η genannt werden.

Jede Zahl A von $K(\mathfrak{p})$ ist dann durch dieses System eindeutig in der Form darstellbar

$$(3.) \qquad A = \pi^a w^b \eta_1^{c_1} \dots \eta_\lambda^{c_\lambda}. \qquad \begin{pmatrix} a = 0, \pm 1, \dots \\ b = 0, 1, \dots P-1 \\ c_i = c_i^{(0)} + c_1^{(i)} p + \dots \end{pmatrix}$$

Bei dem einfachsten Körper $K(p)$ der rationalen Zahlen ist $e=f=\lambda=1$ und $\pi=p$; ist p irgend eine *ungerade* reelle Primzahl, so enthält $K(p)$ alle und nur die $(p-1)$-ten Einheitswurzeln; endlich kann für η die einfachste Einseinheit ersten Grades $1+p$ gewählt werden. So ergibt sich die folgende eindeutige multiplikative Darstellung aller rationalen Zahlen:

$$(3^a.) \qquad A = p^a w^b (1+p)^c \qquad (p). \qquad \begin{pmatrix} b=0,1,\dots p-2 \\ c = c_0 + c_1 p + \dots \end{pmatrix}$$

Ist $K(\mathfrak{p})$ ein s. g. *regulärer* algebraischer Körper, welcher keine p-ten Einheitswurzeln enthält, so ist $P=p^f-1$, also w eine primitive (p^f-1)-te Einheitswurzel. Auch in diesem allgemeinen Falle kann ein sehr einfaches vollständiges Fundamentalsystem $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\lambda$ für die Dar-

stellung aller Einseinheiten angegeben werden. Setzt man nämlich die größte in dem Bruche $\frac{e}{p-1}$ enthaltene ganze Zahl $\left[\frac{e}{p-1}\right]$ gleich r und bezeichnet durch k der Reihe nach jede der e Einheiten modulo p in der Reihe $1, 2, \ldots r+e$, so bilden die $\lambda = ef$ Einseinheiten

$$(4.) \qquad 1+\pi^k,\ 1+w\pi^k, \ldots 1+w^{f-1}\pi^k$$

mit π und w zusammen ein vollständiges Fundamentalsystem $(\pi, w, \eta_1, \ldots \eta_\lambda)$ für die multiplikative Darstellung aller Zahlen A der Körper $K(\mathfrak{p})$. Hier sind also die Grade k aller Elemente η_i durch p nicht teilbare Zahlen, welche sämtlich $\leqq r+e=\left[\frac{ep}{p-1}\right]$ sind. Ist speziell $p>e+1$, also $r=0$, so sind die e Exponenten k einfach die Zahlen $1, 2, \ldots e$ selbst, d. h. dann bilden die λ Einseinheiten

$$(4^a.) \qquad 1+w^i\pi^k \qquad \binom{i=0,1,\ldots f-1}{k=1,2,\ldots e}$$

mit π und w zusammen ein Fundamentalsystem für den Bereich $K(\mathfrak{p})$. Ist außerdem noch $e=1$, also p kein Diskriminantenteiler, so ist $\pi=p$, $f=\lambda$; dann erhält man die folgende einfachste multiplikative Darstellung aller Zahlen A des Bereiches $K(\mathfrak{p})$

$$(4^b.) \quad A=p^a\cdot w^b(1+p)^{c_0}(1+wp)^{c_1}\cdots(1+w^{\lambda-1}p)^{c_{\lambda-1}} \qquad (\mathfrak{p}),$$

welche die genaue Verallgemeinerung von $(3^a.)$ ist.

Allein in dem Falle, daß $K(\mathfrak{p})$ mindestens die p-ten Einheitswurzeln enthält, besitzen die Elemente η_i nicht alle die in (4.) angegebene einfachste Form. Dieser Fall tritt nach H^{II} S. 217 (2.) stets und nur dann ein, wenn bei der multiplikativen Darstellung von $-p=\pi^e w^g \eta$ die Ordnung e und der Index g beide durch $(p-1)$ teilbar sind. Auch in diesem allgemeinsten Falle sind die Grade k der λ Einseinheiten $\eta_1, \ldots \eta_\lambda$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots r+e$, sie sind aber hier nicht alle Einheiten modulo p, sondern zum Teil Multipla von p. Ist nämlich unter dieser Voraussetzung $e=e_0(p-1)p^{\nu_0-1}$, wo e_0 nicht mehr p enthält, so sind jene letzten Grade sämtlich Zahlen von der Form $e_0p^{\nu_i}$, deren Exponenten $\nu_1, \nu_2, \ldots$ alle verschieden und höchstens gleich ν_0 sind.

Der einfachste Fall dieser Art ist der Körper $K(2)$ der rationalen dyadischen Zahlen, da ja dieser offenbar die zweite Wurzel aus 1 enthält.

Hier ist also $w = -1$, und für η ergibt sich die einfachste Einseinheit *zweiten* Grades $1 + 2^2 = 5$. So erhält man hier die wohlbekannte Darstellung

$$(4^c.) \qquad A = 2^a(-1)^b 5^c \qquad (2) \qquad \begin{pmatrix} b=0,1 \\ c=c_0+2c_1+\cdots \end{pmatrix}$$

aller rationalen Zahlen für den Bereich von 2.

§ 1.

Die Auflösung der reinen Gleichungen in beliebigen algebraischen Körpern. Die Potenzreste und die verallgemeinerten *Legendre*schen Symbole.

Ist m eine beliebige positive ganze Zahl, so besitzt die Kongruenz:

$$(1.) \qquad x^m \equiv A \pmod{\mathfrak{p}^k} \qquad (k=1,2,\ldots)$$

im Körper K stets und nur dann für jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{p}$ als Modul eine Lösung, wenn die entsprechende Gleichung

$$(1^a.) \qquad x^m \equiv A \pmod{\mathfrak{p}}$$

wenigstens eine Wurzel im Körper $K(\mathfrak{p})$ hat, wenn also A die m-te Potenz einer π-adischen Zahl ist. Die erste Bedingung enthält die geltende allgemeinste Definition der m-ten Potenzreste nach $\mathfrak{p}$; also kann ich die folgende mit jener übereinstimmende Definition der m-ten Potenzreste aufstellen:

> Eine Zahl A des algebraischen Körpers K ist stets und nur dann m-ter Potenzrest modulo $\mathfrak{p}$, wenn sie die m-te Potenz einer π-adischen Zahl ist, oder wenn die zugehörige reine Gleichung $(1^a.)$ wenigstens eine π-adische Wurzel besitzt.

Die Gleichung $(1^a.)$ hat, wenn überhaupt, offenbar lauter verschiedene Wurzeln, falls $A \gtrless 0$ ist. Besitzt sie eine Wurzel x_0 und ist $x_1 = \xi x_0$ eine zweite, so muß der Multiplikator ξ die Gleichung

$$(2.) \qquad \xi^m = 1 \pmod{\mathfrak{p}}$$

befriedigen, also eine von 1 verschiedene m-te Einheitswurzel sein; ist umgekehrt ξ eine solche, so ist $x_1 = \xi x_0$ eine zweite Wurzel von $(1^a.)$. Nun enthält der Körper $K(\mathfrak{p})$ alle und nur die $P = (p^f - 1)p^\nu$-ten Einheitswurzeln, und unter ihnen gibt es genau

$$(3.) \qquad B = (m, P) = (m, (p^f - 1)p^\nu),$$

welche zugleich m-te Einheitswurzeln sind. Hieraus folgt sofort der Satz:

Die Gleichung (1ª.) besitzt B Wurzeln oder keine Wurzel, je nachdem A m-ter Potenzrest ist, oder nicht.

Durch die in (3.) a. S. 235 gegebene multiplikative Darstellung von A wird nun die Frage, wann A m-ter Potenzrest zu $\mathfrak{p}$ ist, sofort und wunderbar einfach gelöst: Soll nämlich die Gleichung (1ª.) eine Wurzel

$$(4.) \qquad x = \pi^{\xi} w^{\eta} \eta_1^{\zeta_1} \eta_2^{\zeta_2} \dots \eta_\lambda^{\zeta_\lambda}$$

haben, so folgen aus der Gleichung

$$(5.) \qquad \pi^{m\xi} w^{m\eta} \eta_1^{m\zeta_1} \dots \eta_\lambda^{m\zeta_\lambda} = \pi^{a} w^{b} \eta_1^{c_1} \dots \eta_\lambda^{c_\lambda}$$

für die $\lambda + 2$ unbekannten Exponenten ξ, η, ζ_i die Bedingungen:

$$(5^a). \qquad m\xi = a, \quad m\eta \equiv b \pmod{P}, \quad m\zeta_i = c_i \ (p) \qquad {\scriptstyle (i=1,\dots\lambda),}$$

welche bekanntlich dann und nur dann wenigstens eine Lösung besitzen, wenn a, b, c_i die folgenden Bedingungen:

$$(6.) \quad a \equiv 0 \pmod{m}, \quad b \equiv 0 \pmod{(m, P) = B}, \quad c_i \equiv 0 \pmod{(m, p^\infty)}$$

sämtlich erfüllen, wobei allgemein unter (m, r) der größte gemeinsame Teiler von m und r verstanden wird (hiernach bedeutet speziell (m, p^∞) die größte in m enthaltene Potenz von p, d. h. es ist $(m, p^\infty) = p^\mu$, wenn p^μ die höchste in $m = p^\mu m_0$ enthaltene Potenz von p ist).

Um diese notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß A m-ter Potenzrest ist, einfacher aussprechen zu können, führe ich ein Symbol $\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}$ ein, welches die unmittelbare Verallgemeinerung des *Legendre*schen Zeichens in der Theorie der quadratischen Reste im rationalen Zahlkörper für das hier behandelte allgemeinste Problem ist. Es seien

$$(7.) \qquad \alpha, \beta, \gamma_1, \dots \gamma_\lambda$$

je eine primitive Einheitswurzel des Grades

$$(7^a.) \qquad m, B, p^\mu, \dots p^\mu,$$

so daß also die reinen Gleichungen niedrigsten Grades für sie:

$$(7^b.) \qquad \alpha^m = 1, \quad \beta^B = 1, \quad \gamma_i^{p^\mu} = 1$$

sind. Dann ordne ich jeder Zahl $A = \pi^a w^b \eta_1^{c_1}, \dots \eta_\lambda^{c_\lambda}$ das folgende Symbol zu:

$$(8.) \qquad \left\{\frac{A}{p}\right\}_m = (\alpha^a, \beta^b, \gamma_1^{c_1}, \dots \gamma_\lambda^{c_\lambda}) = \mathfrak{a},$$

welches „der Charakter von A für den Exponenten m" heißen soll. Die Elemente $\alpha^a, \beta^b, \gamma_i^{c_i}$ eines jeden solchen Charakters sind m-te, B-te, p^μ-te Einheitswurzeln, da ja $\gamma_i^{c_i} = \gamma_i^{c_i^{(0)}}$ ist, wenn $c_i = c_i^{(0)} + p^\mu c_i'$, wenn also $c_i^{(0)}$ der μ-te Näherungswert der p-adischen Zahl c_i ist. Die Charaktere hängen von der Auswahl der primitiven Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma_1, \ldots \gamma_\lambda$ ab, welche ein für alle Male fest, sonst aber ganz beliebig zu machen ist. Da sich bei den meisten Untersuchungen der Exponent m nicht ändert, kann und soll in diesen Fällen der Index m fortgelassen werden.

Zu jeder Zahl A von $K(\mathfrak{p})$ gehört ein einziger Charakter $\mathfrak{a} = \left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}$ und umgekehrt zu jedem Charakter unendlich viele Zahlen des Körpers. Die Anzahl M aller verschiedenen Charaktere $\mathfrak{a}$ für einen bestimmten Exponenten m ist offenbar:

$$(9.) \qquad M = m \cdot B \cdot p^{\lambda\mu} = m(m, P)(m, p^\infty)^\lambda.$$

Für diese M Charaktere $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_{M-1}$ werde nun eine Verknüpfungsoperation durch die folgende Gleichung definiert:

$$(10.) \qquad \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}' = (\alpha^a, \beta^b, \gamma_i^{c_i})(\alpha^{a'}, \beta^{b'}, \gamma_i^{c_i'}) = (\alpha^{a+a'}, \beta^{b+b'}, \gamma_i^{c_i+c_i'}).$$

Dann bilden dieselben offenbar eine kommutative (*Abel*sche) Gruppe M-ter Ordnung, deren Einheitselement der s. g. *Einheitscharakter:*

$$(10^a.) \qquad (1) = (1, 1, \ldots 1)$$

ist, dessen $\lambda + 2$ Elemente sämtlich gleich $+1$ sind.

Alle und nur die Zahlen A sind dann m-te Potenzreste, deren Charakter $\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} = (1)$ ist; denn allein dann genügen die Exponenten a, b, c_i den Bedingungen (6.), wenn die $\lambda + 2$ Gleichungen;

$$\alpha^a = 1, \quad \beta^b = 1, \quad \gamma_i^{c_i} = 1$$

sämtlich erfüllt sind. Sind ferner

$$A = \pi^a w^b \eta_1^{c_1} \ldots \eta_\lambda^{c_\lambda} \text{ und } A' = \pi^{a'} w^{b'} \eta_1^{c_1'} \ldots \eta_\lambda^{c_\lambda'}$$

zwei beliebige Zahlen des Körpers mit den Charakteren

$$\mathfrak{a} = \left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} = (\alpha^a, \beta^b, \gamma_i^{c_i}) \text{ und } \mathfrak{a}' = \left\{\frac{A'}{\mathfrak{p}}\right\} = (\alpha^{a'}, \beta^{b'}, \gamma_i^{c_i'}),$$

so besitzt ihr Produkt $AA' = \pi^{a+a'} w^{b+b'} \eta_1^{c_1+c_1'} \ldots \eta_\lambda^{c_\lambda+c_\lambda'}$ den Charakter $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}' = (\alpha^{a+a'}, \beta^{b+b'}, \gamma_i^{c_i+c_i'})$, und hieraus folgt nach (10.) die Fundamentalrelation für die Charaktere:

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}\left\{\frac{A'}{\mathfrak{p}}\right\}=\left\{\frac{AA'}{\mathfrak{p}}\right\}. \tag{11.}$$

Speziell ist also stets $\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}^m=\left\{\frac{A^m}{\mathfrak{p}}\right\}=(1)$, weil jedes A^m m-ter Potenzrest ist. Es ergibt sich also der Satz:

Jeder der M Charaktere $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_{M-1})$ gehört zum Exponenten m oder zu einem Teiler von m.

Alle Zahlen A des Körpers $K(\mathfrak{p})$ bilden eine *Abel*sche Gruppe $\mathfrak{A}$ von unendlich hoher Ordnung, da das Produkt zweier Zahlen A und A' wieder dem Körper angehört. Die Gesamtheit $\mathfrak{A}_0$ aller m-ten Potenzreste A_0, für welche also $\left\{\frac{A_0}{\mathfrak{p}}\right\}=(1)$ ist, bildet dann eine unendliche *Abel*sche Untergruppe von $\mathfrak{A}$, da das Produkt zweier Einheitscharaktere nach (11.) wieder ein solcher ist. Ebenso bildet die Gesamtheit $\mathfrak{A}_k$ aller Zahlen A_k, welche einen und denselben Charakter $\left\{\frac{A_k}{\mathfrak{p}}\right\}=\mathfrak{a}_k$ haben, eine bestimmte Nebengruppe zu $\mathfrak{A}_0$ in bezug auf $\mathfrak{A}$, denn nach (11.) besteht dieser Bereich aus allen und nur den Zahlen $A_k, A_k', \ldots$, welche sich von einander um einen beliebigen Faktor der Gruppe $\mathfrak{A}_0$, d. h. um eine beliebige m-te Potenz, unterscheiden.

Die Gruppe $\mathfrak{A}_0$ der m-ten Potenzreste ist also eine Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{A}$ aller Zahlen von $K(\mathfrak{p})$ vom Index M mit den M Nebengruppen $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_{M-1}$ derjenigen Zahlen, welche die Charaktere $1, \mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_{M-1}$ besitzen. Die Gruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_0$ der Nebengruppen $(\mathfrak{A}_k)$ ist also der Gruppe der M Charaktere $(\mathfrak{a}_k)$ einstufig isomorph.

Die Untersuchung des Symboles $\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}_m$ für einen beliebigen Potenzexponenten m kann stets auf den Fall zurückgeführt werden, daß dieser eine Primzahlpotenz ist. Es sei nämlich

$$m=QR \qquad (Q, R)=1$$

irgend eine Zerlegung von m in zwei teilerfremde Faktoren, und es werden wie vorher durch die Charaktere

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}_Q, \qquad \left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}_R \text{ und } \left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}_{QR}$$

die Charaktere einer und derselben Zahl $A=\pi^a w^b \eta_1^{e_1}\ldots\eta_\lambda^{e_\lambda}$ für die Fälle bezeichnet, daß die Potenzexponenten Q, R und QR sind, also die reinen Gleichungen

$$x^Q = A \ (\mathfrak{p}), \quad x^R = A \ (\mathfrak{p}) \text{ und } x^{QR} = A \ (\mathfrak{p})$$

innerhalb $K(\mathfrak{p})$ aufgelöst werden sollen. Dann sind jene Charaktere bzw.

$$(\alpha_Q^a, \beta_Q^b, \gamma_Q^{(i)c_i}), \quad (\alpha_R^a, \beta_R^b, \gamma_R^{(i)c_i}) \text{ und } (\alpha_{QR}^a, \beta_{QR}^b, \gamma_{QR}^{(i)c_i}),$$

wo die Zahlen

$\alpha_Q, \alpha_R, \alpha_{QR}$ je eine beliebig gewählte primitive Q-te, R-te, QR-te Einheitswurzel,
$\beta_Q, \beta_R, \beta_{QR}$ „ „ „ „ „ (Q,P)-te, (R,P)-te, (QR,P)-te „ ,
$\gamma_Q^{(i)}, \gamma_R^{(i)}, \gamma_{QR}^{(i)}$ „ „ „ „ „ (Q,p^∞)-te, (R,p^∞)-te, (QR,p^∞)-te „

sind. Sind nun Q und R teilerfremd und ist s eine beliebige ganze Zahl, so sind auch (Q,s) und (R,s) teilerfremd. Man kann also von vornherein jene primitiven Einheitswurzeln so auswählen, daß

$$\alpha_{QR} = \alpha_Q \cdot \alpha_R, \quad \beta_{QR} = \beta_Q \cdot \beta_R, \quad \gamma_{QR}^{(i)} = \gamma_Q^{(i)} \cdot \gamma_R^{(i)}$$

ist. Bei dieser Wahl ergibt sich die allgemeine Zerlegungsgleichung:

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}_{QR} = \left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}_Q \cdot \left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}_R. \tag{12.}$$

Diese Zerlegung ist eindeutig. In der Tat kann nämlich irgend ein Charakter $\mathfrak{a}_m$ für den Exponenten m nicht auf zwei verschiedene Weisen als Produkt je eines Charakters für die Exponenten Q und R zerlegt werden. Bestünde nämlich eine Gleichung

$$\mathfrak{a}_Q \mathfrak{a}_R = \mathfrak{a}'_Q \mathfrak{a}'_R,$$

und sind Q' und R' so gewählt, daß $QQ' + RR' = 1$ ist, so folgt aus der obigen Gleichung durch Potenzierung mit dem Exponenten $1 - QQ' = RR'$, da $\mathfrak{a}_Q^{QQ'} = \mathfrak{a}_R^{RR'} = (1)$ ist: $\mathfrak{a}_Q = \mathfrak{a}_{Q'}$ und entsprechend $\mathfrak{a}_R = \mathfrak{a}_{R'}$.

Die beiden Zerlegungsgleichungen (11.) und (12.) für die Charaktere $\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\}_m$ nach dem Radikanden A und nach dem Exponenten m ergeben nun bei der Frage nach dem Werte dieses Symboles eine Reduktion auf die Fälle, wo sowohl A als m so einfache Werte haben, daß jene Symbole berechnet werden können.

Jede zusammengesetzte Zahl A von beliebiger Ordnungszahl a läßt sich zunächst eindeutig in der Form $A = \pi^a E$ darstellen, wo E die zu A gehörige Einheit heißen soll. Also folgt aus (11.) zuerst die Gleichung:

$$\left\{\frac{A}{\mathfrak{p}}\right\} = \left\{\frac{\pi}{\mathfrak{p}}\right\}^a \left\{\frac{E}{\mathfrak{p}}\right\}, \tag{13.}$$

und aus ihr kann leicht der Satz abgelesen werden:

Eine Zahl A ist stets und nur dann m-ter Potenzrest, wenn ihre Ordnungszahl durch m teilbar und ihre Einheit m-ter Potenzrest ist.

Da die erste dieser beiden Fragen stets sofort zu entscheiden ist, brauchen im folgenden nur noch die Einheiten von $K(\mathfrak{p})$ weiter untersucht zu werden.

Es sei nun $E = w^b \eta_1^{c_1} \dots \eta_l^{c_l}$ eine beliebige Einheit, und

$$\left\{\frac{E}{\mathfrak{p}}\right\}_m = (\beta_m^b, \gamma_m^{(i)c_i})$$

ihr Charakter für die m-ten Potenzreste. Hier ist β_m eine primitive Einheitswurzel vom Grade $(m, P) = (m, p^f - 1)(m, p^\nu)$ und jedes $\gamma_m^{(i)}$ eine primitive (m, p^∞)-te Einheitswurzel, und hier kann und soll das erste Element $\alpha_m^0 = 1$ fortgelassen werden; dasselbe soll im gleichen Falle im Folgenden stets geschehen.

Es sei ferner:

$$(14.) \qquad d = (m, (p^f - 1)p^\infty) = (m, p^f - 1)(m, p^\infty) = d_0 p^{\nu_0},$$

wo also p^{ν_0} die größte in m enthaltene Potenz von p bedeutet. Dann erkennt man ohne weiteres die Richtigkeit der folgenden Gleichung:

$$(15.) \qquad \left\{\frac{E}{\mathfrak{p}}\right\}_m = (\beta_m^b, \gamma_i^{(m)c_i}) = (\beta_d^b, \gamma_i^{(d)c_i}) = \left\{\frac{E}{\mathfrak{p}}\right\}_d,$$

weil die Grade der Einheitswurzeln $\gamma_i^{(m)}$ und β_m bzw. gleich $(m, p^\infty) = p^{\nu_0} = (d, p^\infty)$ und $(m, P) = (m, p^f - 1)(m, p^\nu) = (d, p^f - 1)(d, p^\nu) = (d, P)$ sind. Hieraus ergeben sich sofort die folgenden Sätze:

Ist der Exponent m zu $(p^f - 1)p$ teilerfremd, so sind alle Einheiten E von $K(\mathfrak{p})$ m-te Potenzreste und eine beliebige zusammengesetzte Zahl $A = \pi^a E$ ist stets und nur dann m-ter Potenzrest, wenn ihre Ordnungszahl ein Vielfaches von m ist. Endlich besitzt die Gleichung $x^m = A\ (\mathfrak{p})$ in diesem Falle nur eine einzige Wurzel innerhalb $K(\mathfrak{p})$, weil $(m, P) = 1$ ist.

Hiernach sind also nur noch die Potenzexponenten $d = d_0 p^{\nu_0}$ weiter zu untersuchen, welche Teiler von $(p^f - 1)p^\infty$ sind; und da in diesem Falle nach (12.)

$$(16.) \qquad \left\{\frac{E}{\mathfrak{p}}\right\}_d = \left\{\frac{E}{\mathfrak{p}}\right\}_{d_0} \cdot \left\{\frac{E}{\mathfrak{p}}\right\}_{p^{\nu_0}}$$

ist, kann von vornherein vorausgesetzt werden, daß der Potenzexponent m entweder ein Teiler d_0 von $p^f - 1$, oder daß er eine Potenz von p ist.

Ist zuerst d_0 ein beliebiger Teiler von $p^f - 1$, also zu p teilerfremd, so ist:

$$(17.) \qquad \left\{\frac{E}{\mathfrak{p}}\right\}_{d_0} = (\beta_{d_0}^b, 1, \ldots 1) = \beta_{d_0}^b,$$

wo β_{d_0} eine primitive d_0-te Einheitswurzel bedeutet und alle $\gamma_i^{(d_0)} = 1$ fortgelassen werden können; und da hier $B = (d_0, P) = d_0$ ist, so kann unter Benutzung des vorigen Satzes das folgende allgemeinere Theorem ausgesprochen werden:

Enthält der Potenzexponent m die Primzahl p nicht, so ist der Charakter $\left\{\frac{E}{\mathfrak{p}}\right\}_m$ einer beliebigen Einheit E gleich $\beta_{d_0}^b$, wo β_{d_0} eine primitive $d_0 = (m, p^f - 1)$-te Einheitswurzel und b der Index von E ist. Speziell ist also E stets und nur dann m-ter Potenzrest, wenn ihr Index b durch $(m, p^f - 1) = d_0$ teilbar ist.

Setzt man die $(p^f - 1)p^\nu$-te Einheitswurzel $w = \omega \cdot \omega'$, wo ω eine primitive $(p^f - 1)$-te und ω' eine primitive p^ν-te Einheitswurzel ist, und berücksichtigt, daß sowohl ω' als auch alle Elemente $\eta_1, \ldots \eta_\lambda$ Einseinheiten, also kongruent 1 modulo $\mathfrak{p}$ sind, so ergibt sich für jede Einheit $E = w^b \eta_1^{e_1} \ldots \eta_\lambda^{e_\lambda}$ die Kongruenz:

$$(18.) \qquad E \equiv \omega^b \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Es sei nun wieder $(b, p^f - 1) = d_0$, also $b = d_0 b_0$ und $p^f - 1 = d_0 d_0'$, so ist $E = E_0^{d_0} \equiv (\omega^{b_0})^{d_0} \pmod{\mathfrak{p}}$ ein d_0-ter Potenzrest; also ist:

$$E^{d_0'} = E^{\frac{p^f - 1}{d_0}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}},$$

und zwar *gehört* E modulo $\mathfrak{p}$ zu diesem komplementären Divisor d_0' von $p^f - 1$ als Exponenten. Hieraus ergibt sich die Verallgemeinerung des *Euler*schen Kriteriums in der Theorie der rationalen Potenzreste:

Ist d_0 ein beliebiger Teiler von $p^f - 1$ und d_0' der komplementäre Divisor, so ist eine Einheit E stets und nur dann d_0-ter Potenzrest, wenn $E^{d_0'} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ ist. Gehört also E zum Exponenten d_0' modulo $\mathfrak{p}$, so ist der komplementäre Divisor d_0 der größte Teiler von $p^f - 1$, für welchen die Gleichung $x^{d_0} = E \ (\mathfrak{p})$ eine Lösung innerhalb $K(\mathfrak{p})$ besitzt.

Es sei endlich $m = p^{\nu_0}$ eine beliebige Potenz von p. Da in diesem Falle $(m, P) = (p^{\nu_0}, p^{\nu}) = p^{(\nu_0, \nu)}$ gleich der kleineren von den beiden Potenzen p^{ν_0} und p^{ν} ist, während $(p^{\nu_0}, p^{\infty}) = p^{\nu_0}$ ist, so ist in diesem Falle:

$$\left\{\frac{E}{\mathfrak{p}}\right\}_{p^{\nu_0}} = (\beta^b, \gamma_1^{c_1}, \dots \gamma_l^{c_l}),$$

wo β eine $p^{(\nu, \nu_0)}$-te und jedes γ_i eine p^{ν_0}-te Einheitswurzel ist. Hier ist also eine Einheit E stets und nur dann ein p^{ν_0}-ter Potenzrest, wenn ihr Index durch $p^{(\nu, \nu_0)}$ und wenn jede der p-adischen Zahlen c_i durch p^{ν_0} teilbar ist. In diesem Falle hat die Gleichung:

$$x^{p^{\nu_0}} = E \qquad (\mathfrak{p})$$

innerhalb $K(\mathfrak{p})$ genau $B = p^{(\nu, \nu_0)}$ verschiedene Wurzeln, welche sich um die B-ten Einheitswurzeln unterscheiden. Im regulären Falle, wo $K(\mathfrak{p})$ keine p-ten Einheitswurzeln enthält, besitzt also diese Gleichung für jeden Potenzexponenten p^{ν_0}, wenn überhaupt, nur eine einzige Wurzel. Im allgemeinen Falle, daß $K(\mathfrak{p})$ die p^{ν}-ten Einheitswurzeln und keine höheren enthält, ist die Anzahl der Wurzeln jener Gleichung für $\nu_0 < \nu$ gleich p^{ν_0}, dagegen stets gleich p^{ν}, sobald $\nu_0 \geqq \nu$ wird.

Das Gesamtresultat dieser Untersuchung kann in dem folgenden Satz ausgesprochen werden:

> Eine beliebige algebraische Zahl $A = \pi^a \cdot E$ ist stets und nur dann m-ter Potenzrest, wenn ihre Ordnungszahl a durch m teilbar und ihre Einheit E sowohl $d_0 = (m, p^f - 1)$-ter als auch $p^{\nu_0} = (m, p^{\infty})$-ter Potenzrest ist. Ist dies der Fall, so besitzt die Gleichung $x^m = A$ $(\mathfrak{p})$ genau $(m, P) = d_0 p^{(\nu, \nu_0)}$ verschiedene Wurzeln, wenn $K(\mathfrak{p})$ die p^{ν}-ten, aber nicht die $p^{\nu+1}$-ten Einheitswurzeln enthält.

§ 2.

Die Auflösung der reinen Gleichungen in einem beliebigen algebraischen Körper.

Ich wende mich jetzt zu der Frage, wie auf Grund der soeben durchgeführten Untersuchung am einfachsten entschieden werden kann, ob eine reine Gleichung $x^m = A$ $(\mathfrak{p})$ im Körper $K(\mathfrak{p})$ eine Lösung hat, oder ob eine beliebige Zahl A m-ter Potenzrest ist. Nach (12.) auf S. 241 kann dabei ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß der Grad m eine beliebige Primzahlpotenz q^k ist; und

da jede reine Gleichung $x^{q^k} = A \ (\mathfrak{p})$ durch eine Kette von k reinen Gleichungen vom Primzahlgrade q ersetzt werden kann, so braucht die ganze Untersuchung nur für die reinen Gleichungen

$$(1.) \qquad x^q = A \quad (\mathfrak{p})$$

von einem beliebigen Primzahlgrade q durchgeführt zu werden, und zwar allein unter der Voraussetzung, daß $A = E$ eine Einheit ist, da ja im allgemeinsten Falle nur noch die Forderung hinzutritt, daß die Ordnungszahl von A durch q teilbar sein muß.

Auch hier trenne ich die drei allein möglichen Fälle von einander, daß:

I. q kein Teiler von $(p^f - 1)p$,
II. q ein Teiler von $p^f - 1$,
III. $q = p$

ist, und zeige jetzt, daß die Frage, ob die reine Gleichung (1.) innerhalb $K(\mathfrak{p})$ eine Lösung hat oder nicht, stets zurückführbar ist auf die einfachere Frage, ob die entsprechende Kongruenz:

$$(1^a.) \qquad x^q \equiv A \pmod{\mathfrak{p}^\sigma}$$

für einen geeignet gewählten Exponenten σ in $K(\mathfrak{p})$ lösbar ist, eine Frage, welche stets durch eine endliche Anzahl von Versuchen entschieden werden kann; und zwar kann jener Exponent σ

im ersten der oben unterschiedenen Fälle gleich Null,
im zweiten gleich Eins,
im dritten stets gleich $r + e + 1$

gewählt werden.

Die beiden ersten Behauptungen unseres Satzes erledigen sich ohne weiteres: Ist nämlich q in $(p^f - 1)p$ nicht enthalten, so besitzt (1.) nach dem Satze auf S. 242 unten stets eine Lösung, und das Gleiche gilt für die triviale Kongruenz $x^q \equiv A \pmod{\mathfrak{p}^0}$.

Ist zweitens q ein Teiler von $p^f - 1$, so besitzt nach S. 243 Mitte die Gleichung (1.) stets und nur dann eine Wurzel, wenn der Index b der Einheit A durch q teilbar ist. Andererseits ist in diesem Falle nach (18.) auf S. 243 $A \equiv \omega^b$, wo ω eine primitive $(p^f - 1)$-te Einheitswurzel ist, und das Entsprechende gilt für jede andere Einheit von $K(\mathfrak{p})$. Eine Einheit $x \equiv \omega^\eta \pmod{\mathfrak{p}}$ genügt also dann und nur dann der Kongruenz $x^q \equiv A \equiv \omega^b \pmod{\mathfrak{p}}$, wenn

$$\eta q \equiv b \pmod{p^f - 1},$$

wenn also, wie vorher, b durch q teilbar ist.

Zum Beweise der dritten Behauptung für den Fall $q = p$ betrachte ich zuerst den regulären Fall, daß $K(\mathfrak{p})$ nicht die p-ten Einheitswurzeln enthält, und bezeichne wie in (4.) auf S. 236 durch $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_\lambda$ die $\lambda = ef$ Einseinheiten:

$$(2.) \qquad 1 + w^i \pi^k, \qquad \binom{i = 0, 1, 2, \dots f-1}{k = k_1, k_2, \dots k_e}$$

deren Grade $k_1, k_2, \dots k_e$ die e Einheiten modulo p der Reihe $1, 2, \dots r + e$ sind.

Ist dann wieder ω eine primitive $(p^f - 1)$-te Einheitswurzel, so ist das System $(\omega, \eta_1, \dots \eta_\lambda)$ einmal ein Fundamentalsystem für die multiplikative Darstellung aller Einheiten von $K(\mathfrak{p})$. Andererseits ist *dasselbe System* nach H[II] S. 227 Mitte auch ein Fundamentalsystem für alle Einheiten von $K(\mathfrak{p})$ modulo einer beliebigen Primzahlpotenz $\mathfrak{p}^\sigma$. Ist nämlich wie a. a. O. allgemein p^{μ_i} der Exponent, zu dem die Einseinheit η_i modulo $\mathfrak{p}^\sigma$ gehört, so ist jede Einheit x von $K(\mathfrak{p})$ für diesen Modul eindeutig in der Form

$$(3.) \qquad x \equiv \omega^\beta \eta_1^{\gamma_1} \eta_2^{\gamma_2} \dots \eta_\lambda^{\gamma_\lambda} \pmod{\mathfrak{p}^\sigma} \qquad \binom{\beta < p^f - 1}{\gamma_i < p^{\mu_i}}$$

darstellbar.

Nach S. 244 oben hat nun die Gleichung:

$$(4.) \qquad x^p = A = \omega^b \eta_1^{c_1} \dots \eta_\lambda^{c_\lambda} \qquad (\mathfrak{p})$$

dann und nur dann eine Wurzel, wenn alle Exponenten c_i durch p teilbar sind. Dagegen besitzt die zugehörige Kongruenz:

$$(4^a.) \quad x^p \equiv (\omega^\beta \eta_1^{\gamma_1} \dots \eta_\lambda^{\gamma_\lambda})^p \equiv A \equiv \omega^b \eta_1^{c_1} \dots \eta_\lambda^{c_\lambda} \pmod{\mathfrak{p}^\sigma}$$

für eine beliebige Primteilerpotenz $\mathfrak{p}^\sigma$ allein dann eine Wurzel, wenn die $\lambda + 1$ Kongruenzen:

$$(5.) \qquad p\beta \equiv b \pmod{p^f - 1}, \qquad p\gamma_i \equiv c_i \pmod{p^{\mu_i}}$$

sämtlich ganzzahlig lösbar sind, wenn also alle und nur diejenigen Exponenten c_i durch p teilbar sind, für welche der zugehörige Exponent μ_i mindestens gleich 1 ist.

Dann und nur dann folgt also für die Lösbarkeit der Kongruenz $x^p \equiv A \pmod{\mathfrak{p}^\sigma}$ dieselbe Bedingung wie für diejenige der Gleichung $x^p = A$ $(\mathfrak{p})$, wenn der Modul $\mathfrak{p}^\sigma$ so groß gewählt wird, daß für ihn *alle* λ Einseinheiten η_i mindestens zum Exponenten 1 gehören, wenn also σ größer ist als der größte unter den Graden k_i. Da nun die größte unter den Ein-

heiten k_i aus der Reihe $1, 2, \ldots r+e$ gleich $r+e$ oder $r+e-1$ ist, je nachdem $r+e$ selbst eine Einheit ist oder nicht, so ergibt sich für den hier betrachteten regulären Fall die Richtigkeit auch der dritten Behauptung. Man erhält aber hier noch das weitere Ergebnis, daß dieser Kongruenzmodul $\mathfrak{p}^{r+e+1}$ der *kleinstmögliche* ist, wenn $r+e$ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, während im anderen Falle $\mathfrak{p}^{r+e}$ die niedrigste Potenz von $\mathfrak{p}$ ist, welche für $\mathfrak{p}^\sigma$ gewählt werden kann.

In dem nichtregulären Falle, daß $K(\mathfrak{p})$ außer den (p^f-1)-ten Einheitswurzeln ω^b auch die p^ν-ten Einheitswurzeln $\omega'^{b'}$, aber nicht noch die $p^{\nu+1}$-ten Einheitswurzeln enthält $(\nu>0)$, ist nach H^{III} (2.) a. S. 2 das System $(\omega, \eta_0, \eta_1 \ldots \eta_\lambda)$ ein Fundamentalsystem für die multiplikative Darstellung aller Einheiten von $K(\mathfrak{p})$, in welchem $\omega' = \eta_0$ auch eine Einseinheit dieses Körpers bedeutet. Der wesentliche Unterschied gegen den regulären Fall besteht aber darin, daß dieses System nicht für jeden Modul $\mathfrak{p}^\sigma$ ebenfalls ein Fundamentalsystem ist, sondern nur dann, wenn σ oberhalb einer gewissen Grenze s_e liegt (vgl. H^{III} S. 15 Z. 8 v. o.). Für die kleineren Exponenten tritt an seine Stelle jedesmal ein anderes Fundamentalsystem $(\omega, \overline{\eta}_0, \ldots \overline{\eta}_\lambda)$, dessen $\lambda+1$ Einseinheiten ebenfalls höchstens vom Grade $r+e$ sind und mit den vorigen durch $(\lambda+1)$ Gleichungen

$$\eta_i = \Pi \overline{\eta}_k^{d_{ik}} \qquad (\mathfrak{p}) \tag{6.}$$

zusammenhängen, für welche die Determinante $|d_{ik}|$ durch p nicht teilbar ist. Ersetzt man also in der Darstellung von A die Elemente η_i durch ihre Werte (6.), so ergibt sich eine Darstellung:

$$A = \omega^b \eta_0^{c_0} \ldots \eta_\lambda^{c_\lambda} = \omega^b \overline{\eta}_0^{\bar{c}_0} \overline{\eta}_1^{\bar{c}_1} \ldots \overline{\eta}_\lambda^{\bar{c}_\lambda},$$

wo allgemein die Exponenten $\bar{c}_k$ mit den c_i durch die Substitution:

$$\bar{c}_k = \sum_i c_i d_{ik} \qquad (\mathfrak{p}) \tag{6a.}$$

zusammenhängen.

Aus der früheren Betrachtung im regulären Falle folgt nun, daß auch hier die Gleichung

$$x^p = A = \omega^b \eta_0^{c_0} \eta_1^{c_1} \ldots \eta_\lambda^{c_\lambda} \qquad (\mathfrak{p}) \tag{7.}$$

allein dann eine Wurzel innerhalb $K(\mathfrak{p})$ hat, wenn die $\lambda+1$ Exponenten c_i sämtlich durch p teilbar sind. Dagegen hat für einen beliebigen Modul $\mathfrak{p}^\sigma$ die zugehörige Kongruenz

$$x^p \equiv A \equiv \omega^b \overline{\eta}_0^{\bar{c}_0} \overline{\eta}_1^{\bar{c}_1} \ldots \overline{\eta}_\lambda^{\bar{c}_\lambda} \pmod{\mathfrak{p}^\sigma} \tag{7a.}$$

dann und nur dann eine Wurzel $x \equiv \omega^{\bar\beta}\bar\eta_0^{\bar\gamma_0}\dots\bar\eta_\lambda^{\bar\gamma_\lambda}$, falls die $(\lambda+2)$ Kongruenzen

$(7^b.)$ $p\bar\beta \equiv b \pmod{p^l-1}$, $\quad p\bar\gamma_k \equiv \bar c_k \equiv \Sigma c_i d_{ik} \pmod{p^{\bar\mu_k}}$

sämtlich ganzzahlige Lösungen besitzen, wenn wieder allgemein $\bar\eta_k$ modulo $\mathfrak{p}^\sigma$ zum Exponenten $p^{\bar\mu_k}$ gehört.

Da nun die Exponenten c_i und $\bar c_k$ durch die modulo p umkehrbare ganzzahlige Substitution (d_{ik}) zusammenhängen, so liefern auch hier die $(\lambda+1)$ letzten Kongruenzen dann und nur dann die Bedingungen $\bar c_k \equiv 0 \pmod p$, d. h. dieselben Bedingungen $c_i \equiv 0 \pmod p$ wie für die Auflösbarkeit der Gleichung $x^p = A\ (\mathfrak{p})$, wenn der Exponent des Moduls $\mathfrak{p}^\sigma$ so groß gewählt wird, daß alle jene Potenzen $p^{\bar\mu_k}$ mindestens gleich p werden; und weil die Grade der Einseinheiten $\bar\eta_k$ ebenfalls sämtlich nicht größer als $r+e$ sind, so ist dies sicher stets der Fall, wenn $\sigma \geqq r+e+1$ gewählt wird. Damit ist unsere Behauptung auch in dem irregulären Falle, d. h. ganz allgemein bewiesen.

Sechs Punkte einer Ebene.

Von Herrn *M. Pasch* in Gießen.

In einer Ebene, in der homogene ternäre Koordinaten eingeführt sind, werde der Punkt $x_1|x_2|x_3$ mit x, die Gerade $u_1|u_2|u_3$ mit u, die Form $\Sigma u_i x_i$ mit u_x bezeichnet; weiter (siehe: Archiv d. Math. u. Phys. 1917 Bd. 25 S. 232)

$$\Sigma \pm x_1 y_2 z_3 \text{ mit } \overline{xyz|},$$

$$x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_3 y_1 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \text{ mit } \overline{xy|}_1,\ \overline{xy|}_2,\ \overline{xy|}_3,$$

also die Verbindungslinie der Punkte x und y mit $\overline{xy|}$, entsprechend der Schnittpunkt der Geraden u und v mit $\overline{uv|}$.

Sind nun a, b, c, d, e, f sechs Punkte der Ebene, so lassen sich Ausdrücke bilden, deren jeder dann und nur dann verschwindet, wenn die Punkte auf einem Kegelschnitt liegen. Mit den Zusammenhängen zwischen solchen Ausdrücken haben sich beschäftigt: *Hunyadi*, Journal f. Math. 1877 Bd. 83 S. 76; *August Scholtz*, Archiv d. Math. u. Phys. 1878 Teil 62 S. 317; *Mertens*, Journal f. Math. 1878 Bd. 84 S. 355; *Pasch*, ebd., 1880 Bd. 89 S. 247; *Caspary*, ebd. 1882 Bd. 92 S. 123; *Gundelfinger-Dingeldey*, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte. 1895, § 12. Auf diesen Zusammenhängen beruht, wie im Nachstehenden gezeigt werden soll, auch die Erscheinung, mit der *Edmund Busche* (1861—1916), vom *Pascal*schen Satz ausgehend, sich während des Kriegs beschäftigt hat, bis ihn eine Kugel traf. Siehe: *Riebesell*, Mitteilungen der Math. Ges. in Hamburg 1917 Bd. 5 Heft 6 S. 237.

Der *Pascal*sche Satz führt nämlich, auf das Sechseck $abfcde$ angewendet, zu den Punkten

$$\alpha = \overline{\overline{ab}|\overline{cd}}\|, \quad \beta = \overline{\overline{bf}|\overline{de}}\|, \quad \gamma = \overline{\overline{fc}|\overline{ea}}\|$$

und zur Determinante ihrer Koordinaten:

$$P(abcdef) = \overline{\alpha\beta\gamma}|.$$

Die sechs Punkte liegen auf einem Kegelschnitt unter der Bedingung $P = 0$. Verschwindet also P für irgend eine Permutation der sechs Punkte, so verschwindet es auch für jede andere. Es handelt sich nun (*Riebesell*, a. a. O. S. 239) um die dies erklärende Tatsache, daß *P bei allen Permutationen seinen Absolutwert behält*, und um deren Beweis.

Der Beweis kann aus den obigen Arbeiten entnommen werden. Ich benutze zu dem Zweck die dort vorkommenden Ausdrücke:

$$K(abcdef) = \Sigma \pm a_1^2 \cdot b_2^2 \cdot c_3^2 \cdot d_2 d_3 \cdot e_3 e_1 \cdot f_1 f_2,$$

$$D(abcdef) = \overline{abe}|\overline{cde}|\overline{acf}|\overline{bdf}| - \overline{ace}|\overline{bde}|\overline{abf}|\overline{cdf}|,$$

deren jeder dann und nur dann verschwindet, wenn die sechs Punkte auf einem Kegelschnitt liegen. Dabei drückt $D = 0$ die Gleichheit der Doppelverhältnisse $e(bcda)$ und $f(bcda)$ aus. Aber auch der *Pascal*sche Satz führt zu D, da man P in D umformen kann; siehe: *Gundelfinger*, a. a. O. S. 127 Gl. 24. Nun ist identisch $D = K$; siehe z. B.: *Scholtz*, a. a. O. S. 319 Gl. 3; *Pasch*, a. a. O. S. 248 Gl. 2. Da mithin identisch $D = K = P$, so sind D und P, wie K, alternierende Funktionen der sechs Punkte, abs P fest bei allen Permutationen.

MATHEMATISCHE WERKE

AUS DEM VERLAGE VON GEORG REIMER BERLIN W. 10

Baer, O., Éléments d'algèbre à l'usage des classes moyennes du collège royal français. 8. 1885 . . . . . geb. 2.50
— — Éléments de géométrie plane à l'usage des élèves du collège royal français. 8. 1887 . . . . . geb. 3.—

Ball, Rob. S., Theoretische Mechanik starrer Systeme. Auf Grund der Methoden und Arbeiten Ball's herausgegeben von H. Gravelius. Mit 2 Abbildungen. 8. 1889 . . . . . 14.—

Borchardt, C. W., Gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von G. Hettner. Mit Borchardts Bildnis. 4. 1888 . . . . . 17.—

Brunn, Hermann, Beziehungen des du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Ovaltheorie. Eine mathematische Studie. 1905 . . . . . 7.—

Budde, E., Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme. Ein Lehrbuch für Hochschulen. I. Band: Mechanik der Punkte und Punktsysteme. 8. 1890 . . . . . 7.—
— — II. Band: Mechanische Summen und starre Gebilde. 8. 1891 . . . . . 8.—

Burrau, Dr., Carl, Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus. Mit den natürlichen sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument (Kreis- und Hyperbelfunktionen). 1907 . . . . . geb. 4.—

Crelle, A. L., Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen; mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1 bis 1000. Besorgt von O. Seeliger. . . . . 15.—

Dirichlet, G. Lejeune, Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften. 4.
I. Band. Herausgegeben von L. Kronecker. Mit Dirichlets Bildnis. 1889 . . . . . 21.—
II. Band. Herausgegeben von L. Kronecker, fortgesetzt von L. Fuchs. 1897 . . . . . 18.—

Eisenstein, G., Mathematische Abhandlungen, besonders aus dem Gebiete der höheren Arithmetik und der elliptischen Funktionen. Mit einer Vorrede von Gauß. 4. 1847. (vergriffen)
— — Tabelle der reduzierten positiven ternären quadratischen Formen nebst den Resultaten neuer Forschungen über diese Formen in besonderer Rücksicht auf ihre tabellarische Rechnung. 4. 1851 . . . . . 1.—

Emmerich, Dr. A., Die Brocardschen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks. Mit 50 Figuren im Text und einer lithogr. Tafel. 8. 1891 . . . . . 5.—

Gravelius, H., Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Dezimalteilung der Quadranten, mit ausführlichen Tafeln zum Übergang von der neuen Teilung des Quadranten in die alte und umgekehrt. Nebst vierstelligen Tafeln der Zahlenwerte der trigonometrischen Funktionen, sowie gewöhnlichen Logarithmentafeln und Quadrattafeln. Mit einem Vorworte von Professor Dr. W. Foerster, Direktor der Königl. Sternwarte zu Berlin. 8. 1885 . . . . . geb. 6.—

Haentzschel, E., Studien über die Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Anhang zu Heines Handbuch der Kugelfunktionen. 8. 1893 . . . . . 6.—

Heine, E., Handbuch der Kugelfunktionen. Theorie und Anwendungen. I. Band: Theorie (vergriffen). 1878. —
II. Band: Anwendungen. 1881 . . . . . 6.—

Jacobi, C. G. J., Gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften. 4.
I. Band. Herausgegeben von C. W. Borchardt. Mit dem Bildnis Jacobis. 1881 . . . . . 18.—
II.—VII. Band. Herausgegeben von K. Weierstraß. 1882—1891 . . . . . 99.—
Supplementband. Vorlesungen über Dynamik. Herausgegeben von E. Lottner. 1884 . . . . . 10.—

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann. Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von Felix Müller, Albert Wangerin, Erich Salkowski, sowie der Berliner Mathematischen Gesellschaft, herausgegeben von Emil Lampe.
Bis jetzt erschienen 43 Bände zu verschiedenen Preisen.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. I. Band. 1890—91. 8. 1892 . . . . . 7.60
— — — — II. Band. 1891—92. 8. 1893 . . . . . 4.50
— — — — III. Band. 1892—93. 8. 1894 . . . . . 16.—
— — — — IV. Band. 1894—95. 8. 1897 . . . . . 16.—

Joachimsthal, F., Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. Dritte Auflage, verbessert und durch einen Anhang von Aufgaben und deren Lösungen vermehrt von O. Hermes. Mit 8 Figurentafeln. 8. 1883 . . 3.60

Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle. 1826. Herausgegeben von K. Hensel. Jährlich erscheinen etwa 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band . . . . 16.—
Bis jetzt erschienen 146 Bände.

Kronecker, L., Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Festschrift zu E. E. Kummers 50jährigem Doktor-Jubiläum am 10. September 1881. 8. 1882 . . . . . 6.—

Peters, J., Neue Rechentafeln für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. 1909 . geb. 15.—
— — Fünfstellige Logarithmen der trigonometr. Funktionen für jede Zeitsekunde des Quadranten. 1912. geb. 7.—

Schellbach, K. H., Neue Elemente der Mechanik, dargestellt und bearbeitet von G. Arendt. Mit 12 Figurentafeln. 8. 1860 . . . . . 5.50
— — Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Funktionen. 8. 1864 . . . . . 6.—
— — Über die Zukunft der Mathematik an unseren Gymnasien. 8. 1887 . . . . . —.80

Schulte-Tigges, A., Philosophische Propädeutik auf naturwissenschaftlicher Grundlage für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. 2. Auflage. 1904 . . . . . 3.—

Steiner, J., Gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften. Herausgegeben von K. Weierstraß. 8.
I. Band: Mit 44 Tafeln und Steiners Bildnis. 1881 . . . . . 16.—
II. Band: Mit 23 Tafeln. 1882 . . . . . 18.—

Wiecke, P., Lehrproben. Geometrische und algebraische Betrachtungen über Maxima und Minima. Zum Gebrauch in den oberen Klassen höherer Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht als Vorbereitung für den Besuch deutscher Hochschulen. Mit Figuren im Text und 7 Tafeln. 8. 1894 . . . . . kart. 5.—

Wolff, F. Lehrbuch der Geometrie. 8.
1. Teil. Ebene Elementargeometrie, Trigonometrie, Teilungslehre. 8. verbesserte Auflage. Mit 7 Kupfertafeln. 1870 . . . . . 5.—
2. Teil. Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Mit 2 lithogr. Tafeln. 5. verbesserte Auflage 1872. . . . 3.—

Aus den Schriften der Königlichen Akademie der Wissenschaften Berlin

Bieberbach, Ludw., Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. 16 S. 8° ..... —.50

Born, M., Über anisotrope Flüssigkeiten. Versuch einer Theorie der flüssigen Kristalle und des elektrischen Kerr-Effekts in Flüssigkeiten. 37 S. 8° ..... 2.—

— — und **F. Stumpf,** Über anisotrope Flüssigkeiten. Zweite Mitteilung. Die Temperaturabhängigkeit der Brechungsindizes senkrecht zur optischen Achse. 18 S. 8° ..... 1.—

Einstein, A., Eine neue formale Deutung der Maxwellschen Feldgleichungen der Elektrodynamik. 5 S. 8. ..... —.50

— — Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. 9 S. 8° —.50

— — Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie. 6 S. 8° ... —.50

Frobenius G., Über den Fermatschen Satz ..... 1.—

— — Über das quadratische Reziprozitätsgesetz ..... 1.—

— — Über die Kompositionsreihe einer Gruppe. 6 S. 8° ..... —.50

Hellmann, G., Über die ägyptischen Witterungsangaben im Kalender von Claudius Ptolomäus. 10 S. 8° ..... —.50

Liebisch, Th., Optische Beobachtungen am Quarz. Mit 4 Tafeln. 14 S. 8° .. —.50

— — und **E. Korreng,** Kristallisationsvorgänge in binären Systemen aus Chloriden von einwertigen und zweiwerigen Metallen ..... 1.—

Nernst, W., und **F. Schwers,** Untersuchungen über die spezifische Wärme bei tiefen Temperaturen ..... —.50

Planck, Max, Eine veränderte Formulierung der Quantenhypothese ..... —.50

— — Bemerkung über die Emission von Spektrallinien. 5 S. 8° ..... —.50

— — Über die absolute Entropie einatomiger Körper. 15 S. 8° ..... —.50

Prager, Richard, Über die Periode des veränderlichen Sterns R Lyrae. 8 S. 8° —.50

Rubens, H., und **G. Hettner,** Das langwellige Wasserdampfspektrum und seine Deutung durch die Quantentheorie. 17 S. 8° ..... 1.—

— — und **K. Schwarzschild,** Sind im Sonnenspektrum Wärmestrahlen von großer Wellenlänge vorhanden? ..... —.50

— — und **H. von Wartenberg,** Beitrag zur Kenntnis der langwelligen Reststrahlen ..... 1.—

Schottky, F., Zwei Kurven und zwei Flächen ..... —.50

Schwarzschild, K., Über die Häufigkeit und Leuchtkraft der Sterne von verschiedenem Spektraltypus ..... 1.—

— — Zur Quantenhypothese 22 S. 8° ..... 1.—

— — Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. 11 S. 8° ..... —.50

— — Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. 8 S. 8° ..... —.50

Struve, H., Neue Untersuchungen über die Bewegungen im Saturnsystem. 13 S. 8° —.50

Wien, W., Über eine von der elektromagnetischen Theorie geforderte Einwirkung des magnetischen Feldes auf die von Wasserstoffkanalstrahlen ausgesandten Spektrallinien ..... —.50

Verlag von Georg Reimer Berlin W. 10